



12. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 21. 1. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 17. 1. 2008 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(12. 1) Sei E Hilbertraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

- (a) $\rho(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \rho(T)\}$,
- (b) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$,
- (c) $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T)\}$ und
- (d) $\sigma_r(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\} \setminus \sigma_p(T)$.

(12. 2) Shift-Operatoren Teil 2

Sei S der Rechtsshift in $\ell^2(\mathbb{Z})$, das heißt $S(e^{(n)}) = e^{(n+1)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) für die kanonischen Einheitsvektoren $e^{(n)} = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{Z}}$. Bestimmen Sie das Spektrum von S (das heißt $\rho(S), \sigma_p(S), \sigma_c(S)$ und $\sigma_r(S)$).

(12. 3) Sei E ein \mathbb{C} -Banachraum. Zeigen Sie, dass für alle $S, T \in L(E)$ die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Falls $\lambda - ST$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ invertierbar ist, so ist $\frac{1}{\lambda}(1 + T(\lambda - ST)^{-1}S)$ das Inverse von $\lambda - TS$.
- (b) $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$.

(12. 4) Sei E ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

- (a) Gilt $\langle Tx, x \rangle = 0$ für alle $x \in E$, dann ist $T = 0$.
- (b) $\|T^*x\| = \|Tx\|$ für alle $x \in E \iff T$ ist normal.
- (c) $\|(T^*)^n x\| = \|T^n x\|$ für alle $x \in E$ und alle $n \in \mathbb{N} \iff T$ ist normal.
- (d) Gilt (a) auch, falls E ein \mathbb{R} -Hilbertraum ist?