Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Robert Denk
Thilo Moseler
17. 1. 2008

13. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 28. 1. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 24. 1. 2008 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(13. 1) Volterra-Operator
Betrachten Sie die Volterrasche Integralgleichung

$$f(s) = g(s) + \int_0^s G(s,t)f(t)dt,$$

wobei $G\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass für den Operator $K \in C([0,1])$ mit

$$Kf(s) := \int_0^s G(s,t)f(t)dt$$

$||K^n|| \leq \dfrac{||G||_\infty^n}{n!}$ gilt und folgern Sie daraus, dass die Volterrasche Integralgleichung für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(K)$ von K.

(13. 2) Sei $E \neq \{0\}$ ein komplexer Banachraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

(a) Jeder Randpunkt λ von $\sigma(T)$ ist ein approximativer Eigenwert.

(b) Ist $||T|| \in \sigma(T)$, so gilt $||\mathrm{id}_E + T|| = 1 + ||T||$.

(13. 3) Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

(a) Falls $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in E$, dann ist $T + \mathrm{id}_E$ invertierbar.

(b) $T^*T + \mathrm{id}_E$ ist invertierbar für alle T.

(c) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in E \iff T^* = T$ und $\sigma(T) \subset [0, \infty[$.

(13. 4) Holomorpher Funktionalkalkül
Sei E Hilbertraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie: Ist f ein Polynom, so gilt die Gleichung

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - T)^{-1} d\lambda.$$

Dabei ist Γ ein positiv orientierter Kreis um 0, für dessen Radius r gilt $r(T) < r$.

Bemerkung: Ist f auf einer Obermenge von $\sigma(T)$ holomorph und damit als Potenzreihe darstellbar, so definiert obige Gleichung einen holomorphen Funktionalkalkül.