Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Robert Denk
Thilo Moseler
24. 1. 2008

14. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 4. 2. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 31. 1. 2008 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(14. 1) Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und seien P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume M_1 bzw. M_2. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $M_1 \subset M_2$.

(ii) Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

(iii) Es gilt $||P_1x|| \leq ||P_2x||$ $(x \in H)$.

(iv) Es gilt $P_1 \leq P_2$, d.h. $\langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle$ $(x \in H)$.

(14. 2) Sei E ein Banachraum und $x, x_n \in E$. Zeigen Sie:

(a) Aus $x_n \xrightarrow{s} x$ folgt $x_n \xrightarrow{w} x$ aber nicht umgekehrt.

(b) Falls $x_n \xrightarrow{w} x$, so ist $(||x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$.

(c) Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $P, P_n, n = 1, 2, \ldots$ Projektionen, so dass $P_n \xrightarrow{w} P$. Dann gilt $P_n \xrightarrow{s} P$.

(14. 3) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $E\colon \mathscr{A} \longrightarrow L(H)$ ein projektorwertiges Maß. Zeigen Sie:

(a) $E(\emptyset) = 0$.

(b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B)$ $(A, B \in \mathscr{A})$.

(c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$.

(d) Seien $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(A_n)$. Und für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(A_n)$.

(e) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

(f) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$ $(A, B \in \mathscr{A})$.

(14. 4) Sei nun $X = [0, 1]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}([0, 1])$ und $H = L^2([0, 1])$. Wir definieren für $f \in H$ und $A \in \mathscr{A}$

$$(P_A f)(t) = \chi_A(t) f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$E(A) = \begin{cases} P_{\frac{A}{2}}, & \frac{1}{3} \notin A, \\ P_{\frac{A}{2}} + P_{[\frac{1}{2},1]}, & \frac{1}{3} \in A \end{cases}$$

ist ein projektorwertiges Maß. Hierbei ist $\frac{A}{2} = \left\{\frac{x}{2} : x \in A\right\}$.