Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Robert Denk
Thilo Moseler
31. 1. 2008

15. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 11. 2. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 7. 2. 2008 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(15. 1) Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit $n \mapsto \varphi(n) = \varphi_n$ eine Bijektion, das heißt eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Betrachten Sie den Operator $T \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ definiert durch $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (\varphi_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie $\sigma(T) = [0,1]$ und bestimmen Sie $\sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

(b) Für $A \in \mathscr{B}([0,1])$ definieren wir:

$$E(A)((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } y_n := \begin{cases} x_n, & \varphi_n \in A, \\ 0, & \varphi_n \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass E projektorwertiges Maß ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$ die Gleichheit

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{x,y}(\{\varphi_n\}) = \int_0^1 \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

gilt.

(d) Zeigen Sie, dass E das zu T gehörige projektorwertige Maß ist.

(15. 2) Sei $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar in einem $\mathbb{C}$-Hilbertraum H. Zeigen Sie: Dann gilt

(a) Für $\mu \le \lambda$ ist $F_\lambda - F_\mu$ eine orthogonale Projektion.

(b) Für $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4$ ist

$$(F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1})(F_{\lambda_4} - F_{\lambda_3}) = (F_{\lambda_4} - F_{\lambda_3})(F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1}) = 0.$$

(c) Für $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ und $x \in H$ ist

$$\begin{aligned} ||(F_{\lambda_3} - F_{\lambda_1})x||^2 &= ||(F_{\lambda_3} - F_{\lambda_2})x||^2 + ||(F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1})x||^2 \\ &= \langle (F_{\lambda_3} - F_{\lambda_1})x, x\rangle. \end{aligned}$$

(d) Die Grenzwerte $F_{\lambda+0}$ und $F_{\lambda-0}$ existieren in der starken Operatortopologie und sind orthogonale Projektionen.

(e) Für alle $x \in H$ ist die Funktion $\lambda \mapsto ||F_\lambda x||^2 = \langle F_\lambda x, x\rangle$ monoton wachsend und beschränkt durch $||x||^2$.

(f) Für alle $x, y \in H$ ist die Funktion $\lambda \mapsto \langle F_\lambda x, y\rangle$ von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Es gilt

$$\operatorname{var}\left(\langle F_\lambda x, y\rangle|_{\lambda\in[a,b]}\right) \le ||x|| \cdot ||y||.$$

Zur Erinnerung: Die Totalvariation einer Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ ist definiert durch

$$\operatorname{var}(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

wobei $\mathcal{Z} : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist. Ist $\operatorname{var}(f) < \infty$, so heißt f von beschränkter Variation.