Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
22. 10. 2007

2. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 29. 10. 2007 vorzubereiten. Aufgabe (2.3) ist schriftlich zu bearbeiten und bis zum 25. 10. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(2. 1) Sei X ein reeller Vektorraum mit einer Metrik $d : X^2 \longrightarrow [0, \infty[$. Die Abbildung d heißt *translationsinvariant*, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ und *homogen*, wenn für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Norm auf X, für welche d die zugehörige Metrik ist, wenn d translationsinvariant und homogen ist.

(b) Sind die Metriken aus Aufgabe 1 (a),(c) vom 1. Übungsblatt einer Norm zugehörig, wobei X nun ein reeller Vektorraum ist?

(2. 2) Sei X ein reeller Vektorraum und $p : X \longrightarrow [0, \infty[$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

1. $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ für alle $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: p ist genau dann eine Norm auf x, wenn die Menge $\{x \in X \,|\, p(x) \leq 1\}$ konvex ist.

(2. 3) (a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Menge $\mathbb{O}_1 := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(ii) Die Menge $\mathbb{O}_2 := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]q, \infty[: q \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Falls $\mathbb{O}_i$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, bestimmen Sie die abgeschlossenen Mengen von $(\mathbb{R}, \mathbb{O}_i)$ und den Abschluss, das Innere und den Rand der Mengen $[3, 7[$, $\{7, 24, 47, 85\}$ und $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $(i = 1, 2)$.