Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
25. 10. 2007

3. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 5. 11. 2007 vorzubereiten. Die Aufgaben (3.1) und (3.3) sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 2. 11. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(3. 1) (a) Für $x = (x_n) \in \ell_1$ definieren wir

$$||x|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\ell_1, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist.
Hinweis: Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$T : \ell_1 \to \ell_\infty, \quad x = (x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{1\le p<\infty} \ell_p \subset c_0$ und die Inklusion ist echt. c_0 bezeichnet hierbei den Raum der Nullfolgen.

(3. 2) Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{R}$ eine nicht-leere Menge, und hat man zu jedem $x \in \mathfrak{R}$ eine Menge $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ mit (U0)-(U3), dann ist $\mathbb{O}(\mathbb{U}) := \{O \subset \mathfrak{R} : \forall x \in O \;\; O \in \mathbb{U}_x\}$ eine Topologie auf $\mathfrak{R}$.

(b) Es gilt $\mathbb{U}(\mathbb{O}(\mathbb{U})) = \mathbb{U}$ für jede Familie $\mathbb{U}$ von Umgebungssystemen mit (U0)-(U4), d. h. $\mathbb{O}(\mathbb{U})$ besitzt ausschließlich Umgebungen, wie sie durch $\mathbb{U}$ bereits vorgegeben sind.

(3. 3) X sei eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{F}(X)$ die Menge der $\mathbb{K}$-wertigen Abbildungen auf X. Für $\emptyset \ne B \subset X, f \in \mathfrak{F}(X)$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$U_f^{B,\varepsilon} := \left\{ g \in \mathfrak{F}(X) : \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\emptyset \ne B \subset X$ definiert

$$d_B(f,g) := \min\left\{1, \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)| \right\} \quad (f, g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Semimetrik d_B auf $\mathfrak{F}(X)$. Für alle $\varepsilon \in]0,1[$ und $f, g \in \mathfrak{F}(X)$ gilt

$$g \in U_f^{B,\varepsilon} \Longleftrightarrow d_B(f,g) < \varepsilon.$$

(b) Ist $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ mit $\bigcup_{B \in \mathbb{B}} B = X$, so wird durch

$$\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}} := \left\{ \bigcap_{B \in \mathbb{B}_0} U_f^{B,\varepsilon} : \mathbb{B} \supset \mathbb{B}_0 \text{ endlich}, \varepsilon > 0 \right\}$$

eine Filterbasis definiert. Der davon erzeugte Filter $\mathbb{V}_f^{\mathbb{B}} := [\mathbb{U}_f^{\mathbb{B}}]$ ist dann ein Umgebungssystem für f und nach Aufgabe (3.2) gehört dazu die Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B}) := \mathbb{O}(\mathbb{V}^{\mathbb{B}})$ (*Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Mengen in* $\mathbb{B}$). Diese Topologie besitzt dann gerade ausschließlich Umgebungen wie von $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$ vorgegeben.

(c) Für $\mathbb{B}_p := \{\{x\} : x \in X\}$ heißt $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ auch *Topologie der punktweisen Konvergenz.* Für $f, f_n \in \mathfrak{F}(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ ist äquivalent:

$$f_n \longrightarrow f \text{ in } \mathbb{O}(\mathbb{B}_p) \iff \forall\, x \in X \;\; f_n(x) \longrightarrow f(x).$$

(d) X sei überabzählbar und $A := \{\chi_{\widetilde{T}} : X \supset T \text{ endlich}\}$. Dann gilt $0 \in \dot{A}$ (Häufungspunkt), aber es gibt keine Folge (f_n) in A mit $f_n \longrightarrow 0$ in $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$. Insbesondere ist $\mathbb{O}(\mathbb{B}_p)$ nicht metrisierbar, d. h. diese Topologie kann nicht durch eine Metrik erzeugt werden.
Hinweis: Was bedeutet $0 \in \dot{A}$ im metrischen Raum?

(e) Ist $\mathbb{B}$ höchstens abzählbar, also $\mathbb{B} = \{B_n : n \in I\}$ mit $B_n \subset X$ für $n \in I$, wobei $I = \mathbb{N}$ oder $I = \{1, \ldots, M\}$ für ein $M \in \mathbb{N}$, so wird durch

$$d_{\mathbb{B}}(f,g) := \sum_{n \in I} \frac{1}{2^n} d_{B_n}(f,g) \quad (f, g \in \mathfrak{F}(X))$$

eine Metrik auf $\mathfrak{F}(X)$ definiert, die die Topologie $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ erzeugt, d. h. $\mathbb{O}(\mathbb{B})$ ist metrisierbar.