Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
31. 10. 2007

4. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 12. 11. 2007 vorzubereiten. Die Aufgaben (4.2)-(4.5) sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 8. 11. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(4. 1) Zeigen Sie: Für einen topologischen Raum $\mathfrak{R}$ sind äquivalent:

(a) $\mathfrak{R}$ ist Hausdorffraum.

(b) Jeder konvergente Filter auf $\mathfrak{R}$ besitzt einen eindeutigen Grenzwert.

(c) Für jeden Punkt $x \in \mathfrak{R}$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.

(4. 2) (a) Zeigen Sie: Besitzt ein Filter eine abzählbare Basis, so besitzt er eine Basis $\mathbb{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass für $m > n$ gilt $B_m \subset B_n$.

(b) Es seien $(\mathfrak{R}_\nu, \mathbb{O}_\nu)$, $\nu = 1, 2$ topologische Räume und $f : \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$. $a \in \mathfrak{R}_1$ besitze eine abzählbare Umgebungsbasis. Zeigen Sie:

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \Longleftrightarrow \forall (x_n) \in \mathfrak{R}_1^{\mathbb{N}} \; [x_n \longrightarrow a \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a)] \, .$$

(4. 3) Zeigen Sie Bemerkung 2.1.4: Auf jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum läßt sich eine Norm definieren.

(4. 4) Für $1 \leq p \leq \infty$ und eine reelle $n \times n$-Matrix A definieren wir die Matrixnorm $||A||_p := \sup\{||Ax||_p : x \in \mathbb{R}^n \wedge ||x||_p = 1\}$.

(a) Bestimmen Sie $||A||_1$ und $||A||_\infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $||A||_2^2$ gerade das Maximum aller Eigenwerte von A^*A ist.[1]

(4. 5) Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Zu einem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ sei

$$||p|| := \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

(a) Zeigen Sie: $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ist ein normierter Raum. Ist dieser ein Banachraum?

(b) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T_i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind und ermitteln Sie $||T_i||$ (i=1,2,3):

$$T_1(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad T_2(p) = p'(0), \quad T_3(p) = p'(1).$$

(c) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T_i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ stetig sind und ermitteln Sie $||T_i||$ (i=4,5,6):

$$(T_4 p)(t) = \int_0^t p(s)ds, \quad T_5 p = p', \quad (T_6 p)(t) = p(t+1).$$

---

[1] A^* bezeichnet hierbei die transponierte Matrix zu A.