Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter HOFFMANN
Thilo MOSELER
8. 11. 2007

5. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 19. 11. 2007 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 15. 11. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(5. 1) Es sei E_0 ein Unterraum eines normierten Raumes E und F ein weiterer normierter Raum. Zeigen Sie:

(a) Für $T \in L(E,F)$ gilt $||T_{|E_0}|| \leq ||T||$.

(b) Ist E_0 dicht in E so gilt für $T \in L(E,F)$: $||T_{|E_0}|| = ||T||$.

(5. 2) Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$T : \ell_q \to (\ell_p)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$$

(wobei $x = (s_n) \in \ell_q$, $y = (t_n) \in \ell_p$) ist ein isometrischer Isomorphismus.

(b) Dieselbe Abbildungsvorschrift vermittelt einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ_1 und $(c_0)'$, dem Dualraum des Raumes der Nullfolgen.

(5. 3) Sei $(E, ||\cdot||)$ NVR über $\mathbb{K}$, M Teilraum von E und $f \in M'$. E' sei *strikt konvex*, d.h. für alle F_1, $F_2 \in E'$ mit $||F_i|| = 1$ (i=1,2) gilt

$$\left|\left|\frac{F_1 + F_2}{2}\right|\right| = 1 \Longrightarrow F_1 = F_2.$$

Zeigen Sie: Dann ist die Fortsetzung $F \in E'$ von f mit $||F|| = ||f||$ aus Folgerung 2.3.3 eindeutig.

(5. 4) BANACH-Limes
Zeigen Sie: Es existiert eine lineare Abbildung LIM : $\ell_\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathrm{LIM}(Tx) = \mathrm{LIM}(x)$ für alle $x \in \ell_\infty$, wobei $T \in L(\ell_\infty)$ der *Linksshiftoperator* ist, der $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ auf $Tx = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ abbildet.

(2) Ist $x = (x_n) \in \ell_\infty$ mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathrm{LIM}(x) \geq 0$.

(3) Es gilt $\mathrm{LIM}(e) = 1$, wobei $e = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$.

Hinweis: Setzen Sie $M = \{Tx - x; x \in \ell_\infty\}$, wobei M der gegebene Unterraum ist.