Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
22. 11. 2007

7. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 3. 12. 2007 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 29. 11. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(7. 1) Zur Existenz von überabzählbar vielen linear unabhängigen Vektoren in $\ell_2(\mathbb{N})$:
Zeigen Sie, dass $\left\{\tilde{z} := (z, z^2, z^3, \ldots) : z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\right\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\ell_2(\mathbb{N})$ ist.

(7. 2) Sei $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ Hilbertraum, $B\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ mit

(i) $x \mapsto B(x, y)$ linear $(y \in H)$,

(ii) $y \mapsto B(x, y)$ konjugiert linear $(x \in H)$,

(iii) $|B(x, y)| \leq C||x||\,||y||$ $(x, y \in H)$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Dann existiert genau ein $T \in L(H, H)$ mit

$$B(x, y) = \langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in H).$$

Dabei ist $||T||$ die kleinste Konstante C, für die (iii) gilt.

(7. 3) Zeigen Sie, dass in einem separablen Hilbertraum $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ alle Orthonormalbasen abzählbar sind.
Zur Erinnerung: Ein metrischer (oder topologischer) Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

(7. 4) Zeigen Sie: Es gibt keine Funktion $f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, welche in allen rationalen Zahlen stetig und in allen irrationalen Zahlen unstetig ist.
Interessanterweise gilt dies andersherum jedoch nicht: Es gibt sehr wohl eine Funktion $f\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, welche in allen irrationalen Zahlen stetig und in allen rationalen Zahlen unstetig ist. Auf den Beweis des Zusatzes können Sie verzichten.