Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter HOFFMANN
Thilo MOSELER
29. 11. 2007

8. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 10. 12. 2007 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 6. 12. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(8. 1) Bestimmen Sie die Lösung $x \in C^{\mathbb{R}}[0,1]$ der Integralgleichung

$$x(s) = \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int_0^1 stx(t)dt, \quad s \in [0,1]$$

mit Hilfe der Neumannschen Reihe. Begründen Sie insbesondere, warum Sie diese überhaupt anwenden dürfen.

(8. 2) Sei $(E, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $x \in E$. Zeigen Sie:

(a) Die *Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe*

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_v \right\|$$

besitzt für gegebene $x_\nu \in E$, $\nu = 1, \ldots, n$ immer eine Lösung $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$. $y_x := \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^* x_\nu$ heißt dann *Bestapproximation* des Punktes x in $F := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

(b) Die Menge der Bestapproximationen (Lösungen der Tschebyscheffschen Approximationsaufgabe) ist konvex.

(c) Ist E strikt konvex, dann ist die Bestapproximation des Punktes x in F eindeutig.

(8. 3) Gegeben sei das Intervall $[0,1]$. Dieses werde an den Punkten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ geteilt und das offene Intervall $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ wird herausgenommen. Es entsteht die Menge $T_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Diese wird nun an den Punkten $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$ geteilt und die "mittleren" Drittel herausgenommen, es entsteht $T_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Verfährt man in dieser Weise fort erhält man eine absteigende Folge von Mengen $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \ldots$ wobei T_m aus T_{m-1} durch Wegnahme der mittleren Drittel entsteht. Die Menge $T := \cap_{m=1}^{\infty} T_m$ heißt dann *Cantorsches Diskontinuum.* Wir versehen T mit der Spurtopologie von $[0,1]$.
Außerdem definieren wir $X_i := \{0, 2\}$, $i \in \mathbb{N}$ und versehen X_i mit der diskreten Topologie.
Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f : T \longrightarrow X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ mit $f(x) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei x_i aus der triadischen Darstellung von x

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \qquad \text{mit } x_i = 0, 1 \text{ oder } 2$$

stammt, ist bijektiv.

(b) f ist stetig.

(8. 4) Zeigen Sie, dass im Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.1.1) nicht auf die Vollständigkeit von $(E, \|\ \|)$ verzichtet werden kann. Betrachten Sie hierzu zum Beispiel

$$T_i \colon c_{0,0} \longrightarrow c_{0,0}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_1, 2x_2, \ldots, ix_i, 0, \ldots) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

wobei $c_{0,0} := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, x_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n\}$.