Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
6. 12. 2007

9. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 17. 12. 2007 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 13. 12. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(9. 1) Seien E_ν, $\nu = 1, 2, 3$ Banachräume, $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ sei linear, $S\colon E_2 \longrightarrow E_3$ sei linear, injektiv und stetig und $ST\colon E_1 \longrightarrow E_3$ sei stetig.
Zeigen Sie, dass auch T stetig ist.
Hinweis: Der Verfasser hat hierzu mit Hilfe der Graphen-Abgeschlossenheit argumentiert.

(9. 2) Es seien E_ν, $\nu = 1, 2$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, D ein Unterraum von E_1 und $T\colon D \longrightarrow E_2$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Durch $||x||_T = ||x||_{E_1} + ||Tx||_{E_2}$ für $x \in D$ wird D ein normierter Raum D_T.

(b) Sind E_1 und E_2 vollständig, ist T Graphen-abgeschlossen und D abgeschlossen, so ist D_T Banachraum und $T\colon D_T \longrightarrow E_2$ stetig.

(9. 3) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p$ und $x \in \ell_p$ sind folgende Aussagen äquivalent:
  (i) $x^{(n)}$ konvergiert schwach gegen x.
  (ii) $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x^{(n)}||_p < \infty$.

(b) Für $p = 1$ ist diese Äquivalenz nicht gegeben.

Hinweis: Aufgabe 5.2 ist wohl nützlich.

(9. 4) (a) Sei E ein reflexiver normierter Raum. Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ ist genau dann schwach$*$-konvergent, wenn sie schwach konvergiert.

Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E heißt *schwache Cauchyfolge*, falls für alle $x' \in E'$ die skalare Folge $(x'(x_n))$ eine Cauchyfolge ist.

(b) Zeigen Sie: Jede schwache Cauchyfolge ist beschränkt.

(c) Zeigen Sie: In einem reflexiven Banachraum konvergiert jede schwache Cauchyfolge schwach.

(d) Sei $E = c_0$. Zeigen Sie: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x^{(n)} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-\text{mal}}, 0, 0, \ldots)$$

ist eine schwache Cauchyfolge in E, die nicht schwach konvergiert.