Übungsblatt 1 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Sei K ein Körper. Es bezeichne $K[T]$ den Polynomring in einer Unbestimmten T über K. Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in K[T]$ (alle $a_i \in K$) ein normiertes Polynom vom Grad n (also $a_n = 1$). Es bezeichne M die sogenannte Begleitmatrix von p, das heißt

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Es bezeichne (p) das von p in $K[T]$ erzeugte (Haupt-)Ideal. Weiter schreiben wir $K[M]$ für den von M über K erzeugten (kommutativen!) Unterring des Ringes $K^{n\times n}$ aller $n \times n$-Matrizen über K, oder anders gesagt

$$K[M] = \{f(M) \mid f \in K[T]\} \subseteq K^{n\times n}.$$

(i) Geben Sie einen Ringisomorphismus zwischen $K[T]/(p)$ und $K[M]$ an.
(ii) Ist $K[M]$ ein Körper, falls $K = \mathbb{R}$ und $p = T^2 + 1$? Wenn ja, welcher?
(iii) Ist $K[M]$ ein Körper, falls $K = \mathbb{C}$ und $p = T^2 + 1$? Wenn ja, welcher?
(iv) Für welche p ist $K[M]$ ein Körper?

Es ist selbstverständlich alles zu begründen.

Aufgabe 2: Es seien G_1 und G_2 Gruppen mit den Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$ und $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(i) $H_1 \lhd G_1 \implies f(H_1) \lhd G_2$
(ii) $H_2 \lhd G_2 \implies f^{-1}(H_2) \lhd G_1$

Aufgabe 3: N_1 und N_2 seien Normalteiler der Gruppe G. Es gelte

$$N_1 \cap N_2 = \{1\}.$$

Zeigen Sie

$$\forall a \in N_1 : \forall b \in N_2 : ab = ba.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

Abgabe bis Montag, den 25. Oktober, vor Beginn der Vorlesung