Übungsblatt 2 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe. Es sei $\sim$ eine zweistellige Relation auf G (das heißt eine Teilmenge von $G \times G$ und man schreibt in der Regel $a \sim b$ statt $(a,b) \in \sim$). Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Gruppe H und einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit
$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b)$$
für alle $a, b \in G$.

(ii) $\sim$ ist eine Kongruenzrelation auf G.

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe. Für jedes $a \in G$ bezeichne $\kappa_a : G \to G : b \mapsto aba^{-1}$ die Konjugation von G mit a. Zeigen Sie, daß κ_a für jedes $a \in G$ ein Automorphismus von G ist. Man nennt diese Automorphismen *innere Automorphismen*. Geben Sie jeweils eine abelsche und eine nichtabelsche Gruppe G und einen Gruppenautomorphismus $\varphi : G \to G$ an, der kein innerer Automorphismus ist.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Aufgabe 4: Geben Sie eine Gruppe $G \neq \{1\}$ mit Zentrum $Z(G) = \{1\}$ an.

Aufgabe 5: Welche der folgenden Aussagen ist für jede Gruppe G richtig?

(i) Das neutrale Element von G ist einzige Element $e \in G$, welches $e^2 = e$ erfüllt.

(ii) Sind $a, e \in G$ mit $ae = a$, so ist e das neutrale Element von G.

(iii) Sind $a, e \in G$ mit $ae = a = ea$, so ist e das neutrale Element von G.

(iv) Ist $e \in G$ derart, daß für alle $a \in G$ gilt $ae = a = ea$, so ist e das neutrale Element von G.

(v) Sind $a, b \in G$ mit $a^2 b = a$, so sind a und b invers zueinander.

(vi) Sind $a, b \in G$ mit $ab = 1$, so sind a und b invers zueinander.

(vii) Sind $a, b \in G$ mit $ab = 1 = ba$, so sind a und b invers zueinander.

(viii) Sind $a, b \in G$ mit $a^2 b^2 = 1$, so sind a und b invers zueinander.

Wegen des Feiertags ist die Abgabe bis Dienstag, den 2. November, um 12 Uhr möglich.