Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 5 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Ein (endlicher) *Graph* $G = (E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Menge E von „Ecken" und einer Menge

$$K \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in E, u \neq v\}$$

von „Kanten". Definieren Sie die Begriffe Homomorphismus, Einbettung, Isomorphismus und Automorphismus von Graphen in einer möglichst sinnvollen Art und Weise, auf jeden Fall aber so, daß für beliebige Graphen $G = (E, K)$, $G' = (E', K')$ und G'' folgendes gilt (wir schreiben $\varphi : G \to G'$ für einen Homomorphismus, $\varphi : G \hookrightarrow G'$ für eine Einbettung und $\varphi : G \xrightarrow{\cong} G'$ für einen Isomorphismus von G nach G'):

(i) $\varphi : G \xrightarrow{\cong} G'$ genau dann, wenn $\varphi : E \to E'$ eine Bijektion ist mit $\{u, v\} \in K \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in K'$ für alle $u, v \in E$.

(ii) Ist $\varphi : G \to G'$, so gilt $\varphi : G \xrightarrow{\cong} G'$ genau dann, wenn es ein $\psi : G' \to G$ gibt mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{G'}$.

(iii) Gilt $\varphi : G \to G'$ und $\psi : G' \to G''$, so $\psi \circ \varphi : G \to G''$.

Man gibt einen Graphen oft an durch eine Zeichnung, in der seine Ecken beschriftete Punkte sind und die Kanten durch Verbindungswege zwischen diesen Punkten dargestellt werden. Überlegen Sie sich, warum eine solche Zeichnung **ohne Beschriftung** genau der Angabe eines Graphen **bis auf Isomorphie** entspricht.

Aufgabe 2: Wir definieren für $n \geq 3$ die *Diedergruppe* D_n (bis auf Isomorphie) als die Automorphismengruppe des zyklischen Graphen mit n Knoten (der in einer Zeichnung durch ein n-Eck gegeben ist, am schönsten durch ein regelmäßiges n-Eck). Zeigen Sie:

(i) Es gibt $s, d \in D_n$ mit $s^2 = d^n = 1$ und $sd = d^{-1}s$.

(ii) Die Ordnung der Gruppe D_n ist $2n$.

(iii) D_n besitzt einen Normalteiler vom Index 2.

(iv) $Z(D_{2n+1}) = \{1\}$ und $Z(D_{2n})$ hat die Ordnung 2.

(v) $D_{2(2n+1)} \cong C_2 \times D_{2n+1}$, wobei C_2 die Gruppe der Ordnung 2 ist.

Aufgabe 3: Finden Sie einen Graphen mit möglichst wenig Kanten, dessen Automorphismengruppe isomorph zur Diedergruppe D_4 ist.

Aufgabe 4: Finden Sie einen Graphen, dessen Automorphismengruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 5: Für welche n ist D_n zyklisch?

Abgabe bis Montag, den 22. November vor der Vorlesung.