Übungsblatt 6 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und sei (in Zyklendarstellung)

$$\sigma := (1 \ldots n) \in S_n.$$

(i) Wieviel Elemente hat die von σ erzeugte Untergruppe $\langle\sigma\rangle \subseteq S_n$?
(ii) Zeigen Sie, daß σ genau $(n-1)!$ verschiedene Konjugierte (in der Gruppe S_n) besitzt.
(iii) Für welche n ist $\langle\sigma\rangle$ ein Normalteiler von S_n?
(iv) Für welche n besteht $\langle\sigma\rangle$ nur aus der Identität und n-Zyklen?

Aufgabe 2: Seien N und H Gruppen und $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Die *Menge* $N \times H$ wird eine Gruppe vermöge der Festlegung

$$(x_1, h_1)(x_2, h_2) := (x_1\psi(h_1)(x_2), h_1h_2)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in N, h_1, h_2 \in H$. Wir nennen diese das (äußere) *semidirekte Produkt* von N mit H bezüglich ψ, in Zeichen $N \rtimes_\psi H$.
(ii) Es sind $N' := N \times \{1\}$ ein Normalteiler und $H' := \{1\} \times H$ eine Untergruppe von $N \rtimes_\psi H$ mit $G = N'H'$ und $H' \cap N' = \{1\}$.
(iii) Für alle $x \in N$ und $h \in H$ gilt

$$(\psi(h)(x), 1) = (1, h)(x, 1)(1, h)^{-1}.$$

Aufgabe 3: Ist N ein Normalteiler und H eine Untergruppe der Gruppe G mit $G = NH$ und $H \cap N = \{1\}$, so nennt man G das (innere) semidirekte Produkt seines Normalteilers N mit seiner Untergruppe H. Zeigen Sie, daß diese Sprechweise gerechtfertigt ist, da in diesem Fall mit dem Homomorphismus $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N) : h \mapsto \kappa_h|_N$ gilt, daß die kanonische Abbildung

$$N \rtimes_\psi H \to G : (x, h) \mapsto xh$$

ein Isomorphismus ist (wobei $\kappa_h|_N : N \to N : h \mapsto hxh^{-1}$).

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß die Diedergruppe D_n semidirektes Produkt eines zyklischen Normalteilers und einer zyklischen Untergruppe ist.

Abgabe bis Montag, den 29. November vor der Vorlesung.