Übungsblatt 11 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Es sei I das von 2 und $1+\sqrt{-5}$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/I \cong \mathbb{F}_2$

(ii) Jedes Element von I hat eine gerade Norm.

(iii) I ist kein Hauptideal (Hinweis: Betrachten Sie die Norm.)

Aufgabe 2: Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und bezeichne C_n die zyklische Gruppe der Ordnung n. Sei weiter R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, daß der Gruppenring $R[C_n]$ isomorph zum Restklassenring $R[T]/(T^n - 1)$ ist. Für welche (R, n) ist $R[C_n]$ ein Integritätsbereich?

Aufgabe 3: Zeigen Sie

$$\mathbb{C}[T]/(T^2 + 1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

als $\mathbb{C}$-Algebren.

Aufgabe 4*: Ein komplexes polynomiales Gleichungssystem (in n Variablen mit m Gleichungen) ist von der Form $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$ mit Polynomen $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$. Ein solches Gleichungssystem heißt reell, wenn $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[Z_1, \ldots, Z_n]$. Eine (komplexe) Lösung davon ist ein $z \in \mathbb{C}^n$ mit $f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0$.

Eine Hardwarefirma hat einen teuren Chip in sehr großer Stückzahl gefertigt, der eigentlich zur Berechnung **der Anzahl** der Lösungen komplexer polynomialer Gleichungssysteme dienen soll. Bei der Herstellung unterlief aber ein fataler Fehler: Es fehlen die Eingänge für die Imaginärteile der Koeffizienten der Polynome, so daß der Chip nur für reelle Gleichungssysteme brauchbar scheint. Kann man die Software so bauen, daß der Chip doch noch seinen ursprünglichen Zweck erfüllt?

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Abgabe bis Montag, den 17. Januar, vor der Vorlesung.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4 von Blatt 11: Wir behaupten, daß folgende Programmierung der Software das Problem behebt:

Eingabe: Ein komplexes polynomiales Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \dots, f_m = 0, \tag{1}$$

genauer gesagt ein $m, n \in \mathbb{N}$ und Polynome $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$.

Ausgabe: Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems, genauer gesagt ein Element von $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so daß es genau N viele $x \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$.

(a) Spalte das System in Real- und Imaginärteil auf, genauer gesagt finde $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ mit

$$f_k(X_1 + iY_1, \dots, X_n + iY_n) = u_k + iv_k \qquad \text{für } k \in \{1, \dots, m\}.$$

(b) Lasse die Anzahl M der komplexen Lösungen (aus dem $\mathbb{C}^{2n}$) des **reellen** Gleichungssystems

$$u_1 = v_1 = \dots = u_m = v_m = 0 \tag{2}$$

durch die Hardware berechnen.

(c) Gebe $N := \sqrt{M}$ aus.

Zur Begründung: Betrachte die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}[T]/(T^2 + 1)$. Wenn wir die Restklasse von T modulo $(T^2 + 1)$ mit j bezeichnen, können wir diese als $\mathbb{C}[j] = \mathbb{R}[i, j]$ schreiben. Offensichtlich ist $\mathbb{R}[i, j]$ ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $1, i, j, ij$. Nun stehen die komplexen Lösungen (aus dem $\mathbb{C}^{2n}$) des Systems (**??**) in Bijektion mit den Lösungen über $\mathbb{R}[i, j]$ (d.h., aus dem $\mathbb{R}[i, j]^n$) des Systems (**??**) vermöge der Zuordnung

$$\begin{aligned}&(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n, c_1 + id_1, \dots, c_n + id_n) \\ &\qquad\qquad \mapsto ((a_1 + jb_1) + i(c_1 + jd_1), \dots, (a_n + jb_n) + i(c_n + jd_n)),\end{aligned}$$

wobei $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. In der Tat gilt ja für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
& u_k(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n, c_1 + id_1, \dots, c_n + id_n) = \\
& v_k(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n, c_1 + id_1, \dots, c_n + id_n) = 0 \\
\iff\ & u_k(a_1 + jb_1, \dots, a_n + jb_n, c_1 + jd_1, \dots, c_n + jd_n) = \\
& v_k(a_1 + jb_1, \dots, a_n + jb_n, c_1 + jd_1, \dots, c_n + jd_n) = 0 \\
\iff\ & (u_k + iv_k)(a_1 + jb_1, \dots, a_n + jb_n, c_1 + jd_1, \dots, c_n + jd_n) = 0 \\
\iff\ & f_k((a_1 + jb_1) + i(c_1 + jd_1), \dots, (a_n + jb_n) + i(c_n + jd_n)) = 0.
\end{aligned}$$

Die Zahl $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die die Hardware also im Schritt (b) berechnet ist die Anzahl der Lösungen des Ausgangssystems (**??**), allerdings nicht über $\mathbb{C}$, sondern über $\mathbb{C}[j]$. Da $\mathbb{C}[j]$ als $\mathbb{C}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist, wird nach Aufgabe 3 die Anzahl der komplexen Lösungen des Ausgangssystems über $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ berechnet (dies sind Elemente von $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^n$). Über $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ hat aber ein System gerade quadratisch soviele Lösungen wie über $\mathbb{C}$!