Übungsblatt 14 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Bitte wenden!

Unter einem Ring verstehen wir auf diesem Blatt stets einen kommutativen Ring mit 1. Ein Ringhomomorphismus bilde stets 1 auf 1 ab.

Aufgabe 3: Sei A ein Ring. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge.

(i) Auf $A \times S$ wird durch

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \iff \exists s \in S : s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Für die Äquivalenzklasse von (a, s) bezüglich $\sim$ schreiben wir $\frac{a}{s}$. Die Menge all dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $S^{-1}A$.

(ii) Zeigen Sie die Kürzungsregel

$$\frac{at}{st} = \frac{a}{t}$$

für alle $a \in A$ und $s, t \in S$.

(iii) Durch

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$$

erhält man wohldefinierte Operationen $+$ und $\cdot$ auf $S^{-1}A$, die $S^{-1}A$ zu einem Ring machen. Man nennt $S^{-1}A$ die *Lokalisierung* von A nach S.

(iv) Genau dann ist $S^{-1}A$ der Nullring, wenn $0 \in S$ gilt.

(v) Die Abbildung

$$\iota : A \to S^{-1}A : a \mapsto \frac{a}{1}$$

ist ein Homomorphismus.

(vi) Genau dann ist ι injektiv, wenn S keine Nullteiler von A enthält.

(vii) Ist B ein Ring und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus mit $\varphi(S) \subseteq B^\times$, so ist die Abbildung $\psi : S^{-1}A \to B$ mit

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$$

wohldefiniert und ein Homomorphismus.

(viii) Vermöge der Abbildungen

$$I \mapsto S^{-1}I := \left\{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S\right\} \quad \text{und} \quad J \mapsto \iota^{-1}J$$

entsprechen die Primideale von A, die zu S elementfremd sind, eineindeutig den Primidealen von $S^{-1}A$.

Bitte wenden!

Aufgabe 1: Sei S die Menge der natürlichen Zahlen, die in $\mathbb{Z}$ von keiner der derzeit explizit bekannten Primzahlen geteilt werden. Zeigen Sie, daß S eine multiplikative Menge ist, d.h. $1 \in S$ und $st \in S$ für alle $s, t \in S$ (oder noch anders gesagt: S ist ein Untermonoid von $\mathbb{Z}$ bezüglich der Multiplikation).

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß die Menge aller rationalen Zahlen, die sich als Bruch mit einem Nenner, der von keiner derzeit explizit bekannten Primzahl geteilt wird, schreiben lassen, ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: Sei nun A ein Integritätsbereich. Begründen Sie, warum die Ihnen aus der Vorlesung BII bekannte Konstruktion des *Quotientenkörpers* Quot A von A mit der hier gegebenen Konstruktion von $(A \setminus \{0\})^{-1}A$ übereinstimmt, also

$$\operatorname{Quot} A = (A \setminus \{0\})^{-1}A.$$

Zeigen Sie, daß sich für jede multiplikative Menge $S \subseteq A \setminus \{0\}$ der Ring $S^{-1}A$ in kanonischer Weise als Unterring von Quot A auffassen läßt. (Dies heißt, daß es eine kanonische Einbettung von $S^{-1}A$ in Quot A gibt.)

Aufgabe 5: Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine multiplikative Menge $S \subseteq \mathbb{Z}$ derart, daß $S^{-1}\mathbb{Z}$ genau n Primideale besitzt.

Abgabe bis Rosenmontag, den 7. Februar, vor der Vorlesung.

Fasnachtsregelung: Übungsgruppe 3 wird um einen Tag vorgezogen und findet am Mittwoch, den 2. Februar, von 18h15 bis 19h45 im Raum F420 statt. Alle anderen Gruppen wie gewohnt.

Bitte nicht wenden!