Universität Konstanz | WS 2004/2005
Fachbereich Mathematik und Statistik | 6. Dezember 2004

Erste Klausur zur Algebra (BIII)

- Stellen Sie sicher, daß Sie alle Aufgaben 1 bis 6 erhalten haben.
- Schreiben Sie sofort auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen bis zu 90 Minuten schreiben.
- Als Hilfsmittel ist nur ein handbeschriebenes Merkblatt und Schreibzeug zugelassen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe nur das Blatt zur Lösung, auf dem die Aufgabe steht (falls nötig auch die Rückseite).

Es können maximal 32 Punkte erreicht werden. Viel Erfolg!

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 1 (2 Punkte): Sei G eine Gruppe. Wieviele Elemente hat die Restklassengruppe G/G von G nach seinem Normalteiler $G \lhd G$? Entscheiden Sie sich für *eine* der folgenden vier Antworten! Markieren Sie diese mit einem Kreuz! Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.

☐ Sie hat kein Element. ☐ Sie hat ein Element.

☐ Sie hat unendlich viele Elemente. ☐ Dies hängt von G ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Welche der folgenden Aussagen ist für **jede** Gruppe G wahr (W), welche für **mindestens eine** Gruppe G falsch (F)? Schreiben Sie hinter jede Aussage ein W oder ein F! Jede korrekte Antwort gibt einen Punkt. Für etwaige fehlerhafte Antworten gibt es keinen Punktabzug. Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.

(a) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist abelsch.
(b) Die Restklassengruppe $G/Z(G)$ ist abelsch.
(c) Die Kommutatorgruppe $K(G)$ von G ist abelsch.
(d) Die Restklassengruppe $G/K(G)$ ist abelsch.
(e) Ist $a \in G$ mit $a^9 = a^{10}$, so ist a das neutrale Element von G.
(f) G läßt sich in eine endliche Gruppe einbetten.

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 3 (6 Punkte): Es bezeichne $\mathbb{C}[T]$ den Polynomring in einer Unbestimmten T über den komplexen Zahlen und (T^3) das von dem Polynom T^3 erzeugte Hauptideal in diesem Ring (bestehend aus allen Vielfachen von T^3 im Polynomring). Ist $\mathbb{C}[T]/(T^3)$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne auf eine Übungsaufgabe Bezug zu nehmen!

Aufgabe 4 (6 Punkte): Bestimmen Sie die Ordnung der Matrix

$$a := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ sowie die Ordnung ihrer Restklasse $[a]$ in der Restklassengruppe $G/Z(G)$. Hierbei bezeichnet wie üblich $Z(G)$ das Zentrum von G.

Lösungen zu den Aufgabe 3 und 4:

Name:
Matrikelnummer: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 5 (6 Punkte): Finden Sie eine Untergruppe vom Index 2 der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ der reellen Zahlen (hierbei ist selbstverständlich $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$). Bestimmen Sie die Restklassengruppe (bis auf Isomorphie).

Aufgabe 6 (6 Punkte): Sei n eine natürliche Zahl. Finden Sie Einbettungen $\varphi : S_n \times S_n \to S_{2n}$ und $\psi : S_n \to A_{2n}$.

Lösungen zu den Aufgaben 5 und 6: