Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind linear abhängig?

(a) $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0)\}$
(b) $\{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,2)\}$
(c) $\{(17,39,50,10),(13,12,198,4),(16,1,0,0)\}$
(d) $\{(1,0,2,-1),(4,2,3,0),(5,0,5,-1),(6,3,\frac{3}{4},3)\}$
(e) $\{(1,\frac{1}{2},0,0),(2,-1,1,3),(0,0,1,1),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß $\{(-i,3,1-i),(2i+1,1,i),(3,1,2)\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}^3$ ist.

Aufgabe 3: Es sei V ein K–Vektorraum. Es seien n Vektoren $v_1,\dots,v_n$ in V gegeben, die linear abhängig sind, obwohl je $n-1$ von diesen linear unabhängig sind. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$.
(b) Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ wie in (a) und $\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = 0$, so existiert ein $\alpha \in K$ mit $\mu_1 = \alpha\lambda_1,\dots,\mu_n = \alpha\lambda_n$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie eine Basis des Unterraums U des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^7$, dessen Elemente genau die $(x_1,\dots,x_7) \in \mathbb{R}^7$ sind, für die folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -x_4 + 3x_5 - x_6 + 10x_7\\
4x_1 + 8x_2 - 8x_3 &= 2x_4 - 2x_5 - 8x_6 + x_7\\
x_1 + x_2 + x_3 &= x_4 + x_5 + x_6 + x_7\\
x_2 - 7x_3 &= 2x_4 - 6x_5 - 8x_6 - 10x_7
\end{aligned}$$

Abgabe bis Freitag, den 25. November, vor Beginn der Vorlesung.