Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Sei $U := \text{Span}\{(0,1,-1),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $v := (1,8,2) \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem in 3 Unbestimmten, dessen Lösungsmenge $v + U$ ist.

Aufgabe 2: Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Gibt es für alle $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$ einen $\mathbb{R}$–Vektorraumhomomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_m) = w_m$? Geben Sie einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3: Es sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$.

(a) Geben Sie ein nichttriviales Beispiel für ein solches f.

(b) Zeigen Sie $V = (\text{Kern } f) \oplus (\text{Bild } f)$.

(c) Es sei $g := \text{id}_V - f$. Zeigen Sie $g \circ g = g$, Kern f = Bild g und Kern g = Bild f.

Aufgabe 4: Es bezeichne $M_K(n)$ $(n \geq 1)$ den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über dem Körper K mit der üblichen Addition

$$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} + (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} := (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \qquad (a_{ij}, b_{ij} \in K)$$

und Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} := (\lambda a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \qquad (\lambda, a_{ij} \in K).$$

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_K(n)$ heiße *magisches Quadrat*, wenn alle ihre Spaltensummen $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ und Zeilensummen $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ übereinstimmen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge M der magischen Quadrate bildet einen Untervektorraum von $M_K(n)$.

(b) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Paare $(i_1, j_1), \ldots, (i_d, j_d)$ von Zahlen $i_k, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, so daß

$$\varphi : M \to K^d : (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto (a_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_d j_d})$$

ein K-Vektorraumisomorphismus ist.

Bestimmen Sie

(c) d und $(i_1, j_1), \ldots, (i_d, j_d)$ wie in (b),

(d) die Dimension des Vektorraums M der magischen Quadrate.

Hinweis: Natürlich hat man mit (c) auch (b) gelöst. Überlegen Sie sich trotzdem, daß die Aussage (b) sofort aus Aufgabe 4 von Blatt 8 folgt.

Abgabe bis Freitag, den 23. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.