Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

(a) Durch welche Matrix wird f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ beschrieben?

(b) Durch welche Matrix wird f bezüglich der Basen

$$\mathfrak{v} := ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)) \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} := ((0, 1), (1, 0))$$

beschrieben?

Aufgabe 2: Sei $p \in K[X]$ ein Polynom über dem Körper K, V ein K–Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Wenn $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f ist, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

Aufgabe 3: Sei A eine $n \times n$–Matrix über dem Körper K. Es bezeichne $I \in M_K(n, n)$ die Einheitsmatrix und $e_i \in K^n$ den i-ten Einheitsvektor ($i \in \{1, \dots, n\}$) aufgefaßt als Spaltenvektor. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann invertierbar, wenn sich A durch elementare Zeilenumformungen in I überführen läßt.

(b) Die $n \times (n+1)$–Matrix $(A\ e_i)$ läßt sich genau dann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix der Form $(I\ b)$ mit $b \in K^n$ überführen, wenn A invertierbar ist und b die i-te Spalte der zu A inversen Matrix A^{-1} ist.

(c) Die $n \times (2n)$–Matrix $(A\ I)$ läßt sich genau dann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix der Form $(I\ B)$ mit $B \in M_K(n, n)$ überführen, wenn A invertierbar und $B = A^{-1}$ ist.

Hinweis: Denken Sie bei (b) einfach an das Gaußsche Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme!

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Inverse und die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zweite Klausur am Samstag, den 11. Februar 2006, von 10:00 bis 12:00 Uhr. Modalitäten wie bei der ersten Klausur. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt am 16./17. Januar (für Nachzügler am 23./24. Januar) in den Übungsgruppen.

Abgabe bis Freitag, den 20. Januar, vor Beginn der Vorlesung.