Übungsblatt 13 zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2005/2006

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(x-y+4z) \\ \frac{1}{3}(-2x+2y+z) \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Berechnen Sie f^{-1}.

Aufgabe 2: Sei U ein Untervektorraum des euklidischen Vektorraumes V. Sei $u \in U$ und $v \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $v - u$ steht senkrecht auf U

(b) $\|v - u\| < \|v - u'\|$ für alle $u' \in U \setminus \{u\}$

Wegen (b) kann zu jedem $v \in V$ offenbar höchstens ein $u \in U$ mit diesen Eigenschaften existieren. Wenn dieses u existiert, so nennen wir es die *orthogonale Projektion* von v auf U. Zeigen Sie

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

falls $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von U ist.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_n \in K$. Berechnen Sie die Vandermonde-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1^0 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i).$$

Anleitung: Man führe Induktion nach n. Man ziehe das x_1–fache der vorletzten Spalte von der letzten Spalte ab, dann das x_1–fache der vorvorletzten Spalte von der vorletzten, und so weiter. Dann entwickle man nach der ersten Zeile.

Aufgabe 4: Die Folgen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen seien induktiv definiert durch

$$F_0 := 0, F_1 := 1, \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$$
$$L_0 := 2, L_1 := 1 \qquad \text{und } L_{n+2} := L_{n+1} + L_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie explizite Formeln zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen F_n und der Lucas-Zahlen L_n.

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 12.

Abgabe bis Freitag, den 10. Februar, vor Beginn der Vorlesung.