Universität Konstanz | Fachbereich Mathematik und Statistik
Zweite Klausur zur Linearen Algebra I | 11. Februar 2006
Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 | **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte)

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle 6 **Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Ergebnisse aus den Übungen oder aus der ersten Klausur dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet).
- **Ausnahme:** Das in der Übung behandelte Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix darf benutzt werden.

Beachten Sie, daß die erste Aufgabe sich auf der Rückseite dieses Blattes befindet. Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt **110 Minuten**.

Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 70.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: Erna Musterfrau **Blatt I**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1 (12 Punkte): Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$$

die $n \times n$ – Matrix mit lauter Einsen.

(a) Zeigen Sie, daß 0 ein Eigenwert von A ist. (2 Punkte)
(b) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums von A zum Eigenwert 0. (2 Punkte)
(c) Zeigen Sie, daß n auch ein Eigenwert von A ist. (2 Punkte)
(d) Zeigen Sie, daß A keinen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, n\}$ hat. (3 Punkte)
(e) Bestimmen Sie die Vielfachheiten $\mu(P_A, 0)$ und $\mu(P_A, n)$ der Eigenwerte 0 und n im charakteristischen Polynom P_A von A. (3 Punkte)

Hinweis: Denken Sie eher an die Definition eines Eigenwertes als an das charakteristische Polynom P_A.

Lösung zur Aufgabe 1 (erste Seite):

Bitte nächste Seite benutzen.

Name: Erna Musterfrau **Blatt II**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte)

Lösung zur Aufgabe 1 (zweite Seite):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 1 (letzte Seite):

Name: Erna Musterfrau **Blatt III**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2 (17 Punkte): Betrachten Sie die reelle 2×2-Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $P_M \in \mathbb{R}[t]$ von M. (2 Punkte)
(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von M. (2 Punkte)
(c) Finden Sie eine Basis $\mathfrak{v}$ des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von M. Begründen Sie dabei nicht nur, daß es sich um Eigenvektoren handelt, sondern auch, daß sie eine Basis bilden. (3 Punkte)
(d) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}(\mathrm{id})$ des Basiswechsels von der kanonischen Basis $\mathfrak{e} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^2$ in die Basis $\mathfrak{v}$ sowie die Matrix $M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id})$ des Basiswechsels von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{e}$. (5 Punkte)
(e) Berechnen Sie M^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2 (erste Seite):

Bitte Rückseite benutzen.

Lösung zur Aufgabe 2 (zweite Seite):

Bitte nächste Seite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau **Blatt IV**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte)

Lösung zur Aufgabe 2 (dritte Seite):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 2 (vierte Seite):

Name: Erna Musterfrau **Blatt V**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3 (12 Punkte): Sei $n \geq 2$ und $v := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit lauter Einsen.

Zeigen Sie, daß die Spalten der $n \times (n-1)$ – Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$v^{\perp} := \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

bilden.

Hinweis: Sie dürfen die Aussage (d) von Aufgabe 1 verwenden, auch wenn Sie Aufgabe 1 nicht bearbeiten. Damit können Sie zeigen, daß der (Zeilen-)Rang der Matrix M gleich $n-1$ ist.

Lösung zur Aufgabe 3:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 3 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau **Blatt VI**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4 (11 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Sei f der Endomorphismus von V, der durch

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1}, & \text{falls } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ v_1, & \text{falls } i = n \end{cases}$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, daß es **kein** Polynom $P \in K[t]$ (t eine Unbestimmte) vom Grad $\leq (n-1)$ gibt mit $P(f) = 0$. (3 Punkte)

(b) Finden Sie ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ vom Grad n mit $P(f) = 0$. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, daß für das charakteristische Polynom $P_f \in K[t]$ von f gilt $P_f = (-1)^n(t^n - 1)$. (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau | **Blatt VII**
Matrikelnummer: 01/234567 | **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) | **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5 (10 Punkte): Es sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f \circ f = f$. Beweisen Sie

$$V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f).$$

Hinweis: Betrachten Sie die für alle $v \in V$ gültige Gleichung $v = (v - f(f(v))) + f(f(v))$.

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 5 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau **Blatt VIII**
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6 (8 Punkte): Betrachten Sie die reelle 3×3-Matrix

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie, ob M orthogonal ist. (4 Punkte)
(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix M^{-1}. (2 Punkte)
(c) Bestimmen Sie die Determinante $\det M$. (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 6 (Fortsetzung):