Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik
Testklausur zur Linearen Algebra I 25. November 2005

Name: Erwin Mustermann **Matrikelnummer: 01/234567**

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird): Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dem Deckblatt. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird: Prüfen Sie sofort, ob Sie alle 7 Aufgaben erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf dasjenige Blatt, auf dem die Aufgabe gestellt wird (Vorder- und Rückseite dürfen verwendet werden). Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf das Blatt zu schreiben, auf dem die Aufgabe gestellt wird. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet).

Beachten Sie, daß die erste Aufgabe sich auf der Rückseite dieses Blattes befindet. Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen. Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 100 Minuten. Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 70. **Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!**

Warum eine Testklausur? Diese Testklausur dient dazu, daß Sie vertraut mit dem *Stil* werden, in dem auch die beiden Klausuren mehr oder weniger sein werden. Wir empfehlen Ihnen, die Testklausur unter realistischen Bedingungen zu schreiben, etwa allein unter Zeitdruck in der Bibliothek um zwei Uhr nachmittags. Eine Musterlösung wird am Freitag, den 2. Dezember, auf dieselbe Weise wie die Testklausur verteilt. Die Testklausur wird nicht korrigiert und nicht in den Übungen besprochen. Anders als es in der ersten Klausur sein wird, stehen hier die Aufgaben direkt untereinander. In der ersten Klausur wird jede Aufgabe auf einem anderen Blatt stehen und die Lösung darf nur auf dasselbe Blatt geschrieben werden (siehe Deckblatt), da vor dem Korrigieren die Blätter auseinandergenommen werden. Lesen Sie sich das Deckblatt genau durch, da das Règlement in der ersten Klausur voraussichtlich ganz ähnlich sein wird.

Einige Aufgaben in der ersten Klausur werden natürlich inhaltlich etwas weiter gehen als die Aufgaben in dieser Testklausur, da die Vorlesung bis dahin weiter fortgeschritten sein wird. Als Grundregel gilt auf jeden Fall, daß Sie gut beraten sind, wenn Sie sich intensiv mit den Übungsaufgaben auseinandersetzen. Ein Lernen auf die Klausur ist in diesem Sinne nicht notwendig, sondern nur ein aktives Lernen der Linearen Algebra im Rahmen der stattfindenden Vorlesung und Übung.

Kriterien für die Scheinvergabe zur Linearen Algebra I: Für die Erlangung eines Leistungsnachweises („Schein“) in dieser Vorlesung muß die Anzahl der Punkte, die man insgesamt in den beiden Klausuren erreicht, einen bestimmten Wert überschreiten, der nach der zweiten Klausur festgelegt wird und voraussichtlich bei nicht mehr und nicht sehr viel weniger als 50% liegt. Die Scheine sind benotet. In beiden Klausuren wird die maximal zu erreichende Punktzahl ungefähr gleich groß sein. Die erste Klausur wird am Freitag, den 16. Dezember, von 14–16 Uhr geschrieben, die zweite Klausur gegen oder nach Ende der Vorlesungszeit. Man muß sich für beide Klausuren anmelden. Die Anmeldung zur ersten Klausur erfolgt in der jeweiligen Übungsgruppe am 28./29. November und (für Nachzügler) am 5./6. Dezember. Die Anmeldung muß vom jeweiligen Übungsleiter autorisiert werden. Voraussetzungen für die Autorisierung sind:

- aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,
- Vorrechnen an der Tafel und
- regelmäßiges Abgeben von Übungsblättern gemäß den ausgeteilten Hinweisen zur Anfertigung von Übungsblättern

Wer aus höheren Gründen zum Klausurtermin verhindert ist, sollte sich bitte umgehend beim Dozenten melden. Wer sich für eine Klausur angemeldet hat und kurzfristig erkrankt, sollte ein ärztliches Attest vorweisen. Er wird voraussichtlich mündlich geprüft.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Markieren Sie jede wahre Aussage durch ein „w“, jede falsche durch ein „f“. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für eine falsche, zweideutige oder gar keine Antwort gibt es keinen Punkt (aber auch keinen Punktabzug). Sie brauchen die Antwort ausnahmsweise nicht zu begründen.

(a) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus genau drei Vektoren.
(b) Stehen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ senkrecht aufeinander, so sind sie linear unabhängig.
(c) Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

(d) Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ sind linear abhängig im $\mathbb{R}^2$.
(e) $\mathbb{R}^2$ ist nicht nur Teilmenge, sondern sogar ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$.
(f) Wenn von drei Vektoren in einem Vektorraum je zwei linear unabhängig sind, dann sind sie alle drei linear unabhängig.
(g) Wenn drei Vektoren in einem Vektorraum linear unabhängig sind, dann sind je zwei davon linear unabhängig.
(h) Es gibt einen Vektorraum mit genau 4 Elementen.
(i) Es gibt einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit genau 4 Elementen.
(j) Zu jedem Vektor $\neq 0$ im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^3$, in der dieser Vektor vorkommt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (mit Beweis) oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel für h) jeweils folgende Aussagen:

(a) $h(0) = 0$
(b) $h(1) = 1$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z = (\overline{z} + z)^2$.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Prüfen Sie, ob die Vektoren $(-1, 1, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 1)$ und $(3, 1, 1, 1)$ linear abhängig im $\mathbb{R}^4$ sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$ Vektoren mit $\|x\| = \|y\|$ und $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß dann $x - y$ und $x + y$ senkrecht aufeinanderstehen, d.h. $x \perp y$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Berechnen Sie eine Basis des Unterraums U des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^4$, dessen Elemente genau die $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

sind, für die folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -x_4 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 2x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= x_4 \\ -3x_2 &= 2x_4 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte): Betrachten Sie den $\mathbb{R}$–Vektorraum $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(a) Ist $U_1 := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(2n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ein Untervektorraum von V?

(b) Ist $U_2 := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \quad |f(n)| \leq 17 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ein Untervektorraum von V?