Übungsblatt 7 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Sei X ein topologischer Raum. Man nennt $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ eine *Basis* der Topologie von X, wenn jede offene Menge von X eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ ist. Zeigen Sie für alle *Mengen* X und $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathcal{U}$ ist Basis *einer* Topologie auf X.

(ii) $\mathcal{U}$ ist Basis der von $\mathcal{U}$ erzeugten Topologie auf X.

(iii) $X = \bigcup \mathcal{U}$ und für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ und $a \in U_1 \cap U_2$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $a \in V \subseteq U_1 \cap U_2$.

Insbesondere gilt: Eine Menge von Teilmengen von X, die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist (der leere Durchschnitt sei wieder als X definiert), ist Basis der von $\mathcal{U}$ erzeugten Topologie auf X.

Aufgabe 2: Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Bezeichne $X := \prod_{i\in I} X_i$ das Produkt der Mengen X_i (also die Menge aller Familien $(a_i)_{i\in I}$ mit $a_i \in X_i$ für alle $i \in I$) und $\pi_i : X \to X_i$ die kanonische Projektion auf die i-te Komponente. Wir versehen dann X mit der durch

$$\mathcal{U} := \{\pi_i^{-1}(V) \mid i \in I,\, V \text{ offen in } X_i\} \subseteq 2^X$$

erzeugten Topologie. Diese nennen wir *Produkttopologie*. Zeigen Sie:

(a) Diese Topologie auf X ist die gröbste Topologie, die alle Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ stetig macht.

(b) Die Menge der endlichen Durchschnitte von Mengen der Form

$$\pi_i^{-1}(V) \qquad (i \in I,\ V \text{ offen in } X_i)$$

ist eine Basis der Topologie auf X (der leere Durchschnitt sei wieder X).

(c) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von stetigen Abbildungen $f_i : Y \to X_i$, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 3: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, daß dann

$$\mathcal{O}' := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf Y ist. Man nennt diese die *Spurtopologie* von X auf Y und faßt meist stillschweigend Y zusammen mit $\mathcal{O}'$ wieder als topologischen Raum auf.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: Man sagt, daß eine Menge $\mathcal{U}$ von Mengen die *endliche Durchschnittseigenschaft* hat, wenn der Durchschnitt über je endlich viele Elemente von $\mathcal{U}$ nie leer ist. Ein topologischer Raum X heißt *quasikompakt*, wenn jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Zeigen Sie:

(a) Ein topologischer Raum ist genau dann quasikompakt, wenn jede nichtleere Menge von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft insgesamt einen nichtleeren Durchschnitt hat.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge einer quasikompakten Menge ist selbst (als topologischer Raum mit der Spurtopologie aus Aufgabe 3) wieder quasikompakt.

Aufgabe 5: Sei X ein topologischer Raum und U eine Teilmenge von X. Man nennt U *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus U$ offen ist. Man nennt $a \in X$ einen *Berührpunkt* von U, wenn jede in X offene Menge, die a enthält, einen nichtleeren Schnitt mit U hat. Die Menge $\overline{U}$ der Berührpunkte von U nennt man den Abschluß von U. Zeigen Sie, daß der Abschluß von U die kleinste abgeschlossene Obermenge von U in X ist.

Aufgabe 6: Zeigen Sie den Satz von *Tychonoff*: Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie quasikompakter topologischer Räume X_i, so ist auch $\prod_{i\in I} X_i$ quasikompakt (bezüglich der in Aufgabe 2 eingeführten Produkttopologie).

Hinweis: Betrachten Sie eine nichtleere Menge von in X abgeschlossenen Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Erweitern Sie diese mit dem Lemma von Zorn zu einer maximalen Teilmenge $\mathcal{U}$ der Potenzmenge von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Die Mengen $\{\overline{\pi_i(U)} \mid U \in \mathcal{U}\}$ $(i \in I)$ haben die endliche Durchschnittseigenschaft, wobei $\overline{\pi_i(U)}$ den Abschluß von $\pi_i(U)$ in X_i bezeichnet. Aus der Quasikompaktheit von X_i folgt dann $V_i := \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{\pi_i(U)} \neq \emptyset$. Wähle nun mit Auswahlaxiom ein $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Für jedes $i \in I$ und jede offene Menge V von X_i mit $a_i \in V$ ist $\pi_i^{-1}(V)$ eine offene Menge, die einen nichtleeren Durchschnitt mit jedem Element von $\mathcal{U}$ hat. Also ist wegen der Maximalität von $\mathcal{U}$ auch $\pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ für jedes $i \in I$ und jede offene Umgebung V von X_i mit $a_i \in V$. Da $\mathcal{U}$ wegen der Maximalität unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, ist auch jeder endliche Durchsschnitt solcher $\pi_i^{-1}(V)$ ein Element von $\mathcal{U}$. Daher ist $(a_i)_{i\in I} \in \overline{U}$ für jedes $U \in \mathcal{U}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 9. Juni, vor der Vorlesung.