Übungsblatt 8 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Auf diesem Blatt sei stets A ein kommutativer Ring, und es bezeichne $\operatorname{Sper} A$ sein reelles Spektrum, also die Menge der Anordnungen von A (aufgefaßt als Positivbereiche) zusammen mit der spektralen Topologie.

Aufgabe 1: Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U und V in X gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt (vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 7) und Hausdorffsch ist. Zeigen Sie: Jede kompakte (vgl. Aufgabe 4(b) auf Blatt 7) Teilmenge eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen in X.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß $\operatorname{Sper} A$ im Allgemeinen nicht kompakt ist.

Aufgabe 3: Sei $P \in \operatorname{Sper} A$. Wie üblich bezeichne $\overline{\{P\}}$ den Abschluß der einpunktigen Menge $\{P\}$ im topologischen Raum $\operatorname{Sper} A$. Zeigen Sie

$$\overline{\{P\}} = \{Q \in \operatorname{Sper} A \mid P \subseteq Q\}.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß der Raum $(\operatorname{Sper} A)^{\max}$ der maximalen Anordnungen von A (mit der Spurtopologie von $\operatorname{Sper} A$ versehen) kompakt ist.

Aufgabe 5: Geben Sie explizit alle archimedischen Anordnungen

(i) des Polynomrings $\mathbb{R}[X]$ und

(ii) des Körpers $\mathbb{R}(X)$ der rationalen Funktionen

in einer Variablen an.

Abgabe bis Donnerstag, den 16. Juni, vor der Vorlesung.