Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 9 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1 (Satz von Dini): Sei $X \neq \emptyset$ ein quasikompakter topologischer Raum. Es bezeichne $C(X, \mathbb{R})$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit der Maximumsnorm (Norm der gleichmäßigen Konvergenz). Seien $f, g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots \in C(X, \mathbb{R})$ so, daß für jedes $x \in X$ die Folge $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigt und gegen $f(x)$ konvergiert. Dann konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(X, \mathbb{R})$ gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle für jedes $x \in X$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) - g_{n_x}(x) < \varepsilon$. Es gilt also

$$x \in U_x := (f - g_{n_x})^{-1}([0, \varepsilon/2)) \tag{1}$$

und die Menge U_x ist wegen der Stetigkeit von $f - g_n$ offen für jedes $x \in X$. Wegen der Quasikompaktheit von X gibt es folglich endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}. \tag{2}$$

Setze

$$N := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_m}\}$$

und sei $n \geq N$. Sei $x \in X$. Wir zeigen $\|f - g_n\| < \varepsilon$, ja sogar $|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$. Sei hierzu $x \in X$. Wähle gemäß (2) ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in U_{x_i}$. Wegen (1) und $n \geq n_{x_i}$ gilt

$$f(x) - g_n(x) \leq f(x) - g_{n_{x_i}}(x) < \varepsilon/2. \quad \square$$

Aufgabe 2 (Satz von Stone-Weierstraß): Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter topologischer Raum. Wir versehen die $\mathbb{R}$-Algebra $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit der Maximumsnorm. Sei A eine $\mathbb{Q}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$, die die Punkte von X trennt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y von X gebe es ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Zeigen Sie: A liegt dicht in $C(X, \mathbb{R})$.

Anleitung: Beweise nacheinander folgende Teilbehauptungen:

(a) Der Abschluß von A ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$. Im Folgenden werde deshalb o.B.d.A. A als abgeschlossene $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$ vorausgesetzt.

(b) Sind $f, g_0 \in C(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $0 \leq g_0 \leq \sqrt{f}$ auf X, dann konvergiert die durch $g_{n+1} := g_n + \frac{1}{2}(g - g_n^2)$ definierte Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(X, \mathbb{R})$ gegen $\sqrt{f}$ (wobei $\sqrt{f}(x) := \sqrt{f(x)}$ für $x \in X$).
Hinweis: Verwende die Identität

$$\sqrt{f} - g_{n+1} = (\sqrt{f} - g_n)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{f} + g_n)\right),$$

um durch Induktion

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \sqrt{f} \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Wende dann den Satz von Dini aus Aufgabe 1 an.

(c) $f \in A \implies |f| \in A$

(d) $f, g \in A \implies \min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in A$

(e) Zu je zwei verschiedenen Punkten x und y von X und zu beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $f \in A$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$.

(f) Ist $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ und $x \in X$, so gibt es ein $g \in A$ mit $g(x) = f(x)$ und $g < f + \epsilon$ auf X (benutze die Kompaktheit von X, um g als Minimum endlich vieler geeigneter Funktionen zu wählen).

(g) Ist $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ und $f \in C(X, \mathbb{R})$, so gibt es ein $g \in A$ mit $f - \epsilon < g < f + \epsilon$ auf X (benutze die Kompaktheit von X, um g als Maximum endlich vieler geeigneter Funktionen zu wählen).

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 - x^2)^3 \geq 0 \implies 1 - x^2 \geq 0,$$

es aber dennoch keine Quadratsummen s und t in $\mathbb{R}[X]$ gibt mit

$$1 - X^2 = s + t(1 - X^2)^3.$$

Beweis: Die erste Aussage ist natürlich trivial. Zur zweiten: Angenommen, es gäbe solche t und $s = \sum_i p_i^2$ ($p_i \in \mathbb{R}[X]$). Dann gilt $s(1) = s(-1) = 0$, also $p_i(1) = p_i(-1) = 0$ für alle i. Daher ist $1 - X^2 = (1 - X)(1 + X)$ ein Teiler von p_i, also $(1 - X^2)^2$ ein Teiler von s und daher auch von $1 - X^2$ in $\mathbb{R}[X]$. Widerspruch!

Klausur am Montag, den 11. Juli, von 10h00 (also Punkt 10 Uhr!) bis 12h00 in P1012