Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Klausur zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Ergebnisse aus der Vorlesung dürfen zitiert werden, **nicht** jedoch Ergebnisse aus den Übungen. Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Für jede der vier Aufgaben gibt es zehn Punkte. Alle Antworten sind selbstverständlich zu begründen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die sich durch endlich viele strikte polynomiale Ungleichungen definieren lassen, nennt man *basisoffene* semialgebraische Mengen. Dies sind also genau die Mengen der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \ldots, g_m(x) > 0\} \qquad (m \in \mathbb{N}, g_i \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]).$$

Welche der folgenden Mengen ist eine basisoffene semialgebraische Menge im $\mathbb{R}^2$?

(a) Das aufgeschlitzte Quadrat

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ und } |y| < 1 \text{ und } (x > 0 \text{ oder } y \neq 0)\}.$$

(b) Das durchtrennte Quadrat

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ und } 0 < |y| < 1\}.$$

Aufgabe 2: Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent?

(i) Es ist $\leq$ eine archimedische Anordnung von K (d.h. zu jedem $a \in K$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a \leq N$).

(ii) Die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

besitzt einen Grenzwert bezüglich der Intervalltopologie auf K.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Betrachten Sie den Körper

$$\mathbb{R}((X)) := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i X^i \mid m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten X. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}((X))$ sind Anordnungen (Positivbereiche) dieses Körpers?

$$P_1 := \{0\} \cup \{\lambda X^m + a_{m+1}X^{m+1} + a_{m+2}X^{m+2} + \ldots \mid m \in \mathbb{Z}, 0 < \lambda \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$P_2 := \{0\} \cup \{(-1)^m \lambda X^m + a_{m+1}X^{m+1} + a_{m+2}X^{m+2} + \ldots \mid m \in \mathbb{Z}, 0 < \lambda \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$P_3 := \{0\} \cup \{(-1)^m \lambda X^m + a_{m+1}X^{m+1} + a_{m+2}X^{m+2} + \ldots \mid m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$P_4 := \{0\} \cup \{\lambda X^m + a_{m+1}X^{m+1} + a_{m+2}X^{m+2} + \ldots \mid m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$P_5 := \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 4: Ist die konvexe Hülle (kleinste konvexe Obermenge) einer semialgebraischen Menge im $\mathbb{R}^n$ stets wieder semialgebraisch?