Übungsblatt 7 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Die folgenden Konventionen werden meist gemacht, so auch auf diesem Blatt: Jeder Ring besitze eine 1. Wenn B ein Unterring des Ringes A ist, so meinen wir damit insbesondere $1 \in B$ (wobei 1 die 1 von A und damit dann auch von B ist). Ein Ringhomomorphismus bilde stets 1 auf 1 ab.

Ist A ein kommutativer Ring, so bezeichnet man mit $\operatorname{Spec} A$ (*Spektrum* von A) die Menge seiner Primideale. Bezüglich der Mengeninklusion bildet $\operatorname{Spec} A$ eine partiell geordnete Menge. Die minimalen Elemente dieser partiell geordneten Menge nennt man minimale Primideal von A. Es bezeichne $(\operatorname{Spec} A)^{\min}$ die Menge dieser minimalen Primideale.

Aufgabe 1: Sei A ein kommutativer Ring und $K \subseteq \operatorname{Spec} A$ eine Kette (K ist also eine bezüglich Inklusion totalgeordnete Menge von Primidealen). Es gelte $K \neq \emptyset$. Zeigen Sie $\bigcap K \in \operatorname{Spec} A$ (daß also der Schnitt aller Primideale in K auch wieder ein Primideal ist).

Aufgabe 2: Sei A ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Zeigen Sie, daß es ein $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}$ gibt mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

Aufgabe 3: Sei A ein kommutativer Ring und B ein Unterring von A. Sei $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} B)^{\min}$. Zeigen Sie, daß es $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}$ gibt mit $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 auf Blatt 6.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

(a) $X^4 - 9X^3 - 6X + 3$
(b) $X^6 + X^3 + X + 1$
(c) $2X^3 - 5X + 1$
(d) $X^4 + 1$

Abgabe bis Freitag, den 8. Dezember, um 12 Uhr.