Übungsblatt 11 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper und

$$\varrho : K \to \mathbb{R}$$

die in der Vorlesung definierte Abbildung, die jedem Element $a \in K$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $\varrho(a) \in \mathbb{R}$ zuordnet mit

$$U_a \leq \varrho(a) \leq O_a,$$

wobei $U_a := \{s \in \mathbb{Q} \mid s < a\}$ und $O_a := \{r \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}$. Zeigen Sie:

(a) ϱ ist ein Ringhomomorphismus.

(b) $a \leq b \iff \varrho(a) \leq \varrho(b)$ für alle $a, b \in K$

(c) Ist $(K, \leq)$ schnittvollständig, so ist ϱ ein Isomorphismus angeordneter Körper (das heißt es gelten (a), (b) und zusätzlich ist ϱ bijektiv).

Aufgabe 2: Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $P \subseteq K$ heißt Positivbereich von K, wenn sie nicht -1 enthält, unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und ($a \in P$ oder $-a \in P$) für alle $a \in K$ gilt:

$$-1 \notin P, \quad P + P \subseteq P, \quad PP \subseteq P \quad \text{und} \quad P \cup -P = K.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist P ein Positivbereich von K, so $K^2 \subseteq P$ (d.h. $a^2 \in P$ für alle $a \in K$) und $P \cap -P = \{0\}$.

(b) Ist $\leq$ eine Anordnung von K, so ist $P_{\leq} := \{a \in K \mid a \geq 0\}$ ein Positivbereich von K.

(c) Ist P ein Positivbereich von K, so wird durch

$$a \leq_P b :\iff b - a \in P \qquad (a, b \in K)$$

eine Anordnung von K definiert.

(d) Durch $\leq \mapsto P_{\leq}$ und $P \mapsto \leq_P$ werden zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Anordnungen von K und der Menge der Positivbereiche von K definiert.

Aufgabe 3: Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f \neq 0$ bezeichne $\operatorname{lc}(f)$ seinen Leitkoeffizienten. Zeigen Sie, daß

$$P := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{R}[X], g \neq 0, (f = 0 \text{ oder } \operatorname{lc}(fg) > 0) \right\} \subseteq \mathbb{R}(X)$$

ein Positivbereich von $\mathbb{R}(X)$ ist, dessen zugehörige Anordnung $\leq_P$ nicht archimedisch ist.

Abgabe bis Freitag, den 26. Januar, bis 10:30 Uhr.