Übungsblatt 12 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Sei $L|K$ eine normale algebraische Körpererweiterung, bezeichne $\overline{L}$ einen algebraischen Abschluß von L und seien $x, y \in L$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) x und y haben dasselbe Minimalpolynom über K.

(b) Es gibt einen Automorphimus der Körpererweiterung $L|K$ (also einen Automorphismus von L, dessen Einschränkung auf K die Identität ist), der x auf y abbildet.

(c) Es gibt einen Automorphimus der Körpererweiterung $\overline{L}|K$, der x auf y abbildet.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom mit Zerfällungskörper L. Zeigen Sie, daß alle Nullstellen von f in L dieselbe Vielfachheit haben.

Aufgabe 3: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

(a) Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Begründen Sie, warum $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.

(c) Bestimmen Sie $\#\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.

(d) Welche Gruppen der Ordnung 4 gibt es?

(e) Wieviele Untergruppen hat $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

(f) Zeigen Sie $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(g) Geben Sie alle Zwischenkörper von $K|\mathbb{Q}$ an.

(h) Zeigen Sie $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = K$.

Aufgabe 4: Es sei $f = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, daß f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(b) Rechnen Sie nach, daß für jedes $a \in K$ mit $f(a) = 0$ gilt

$$f(a^2 - 2) = 0 \qquad \text{und} \qquad K = \mathbb{Q}(a).$$

(c) Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.

(d) Zeigen Sie $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Abgabe bis Freitag, den 2. Februar, bis 10:30 Uhr.