Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- konventionelles Schreibzeug und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen. **Schreiben Sie auf den grünen Bogen Ihre Matrikelnummer (nicht Ihren Namen!) und das Datum (20. April 2007). Die restlichen Felder lassen Sie bitte frei.**

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **10 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. **Als Schmierpapier dürfen nur die in dem grünen Umschlag befindlichen gelben Konzeptblätter benutzt werden. Sie dürfen kein eigenes Papier auf den Tisch legen. Die Konzeptblätter müssen zwar abgegeben werden, haben aber keinen Einfluß auf die Bewertung der Klausur. Vergessen Sie also nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.** Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die in der Vorlesung oder in den Übungsaufgaben behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Hilbertscher Basissatz“, „Transitivität der Algebraizität“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Tatsachen aus der Analysis und der Linearen Algebra dürfen verwendet werden.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Nach Beendigung der Klausur:

Schreiben Sie auf jedes der beschriebenen gelben Konzeptblätter Ihren Namen (den Rest der Felder können Sie freilassen). Legen Sie den Klausurbogen, die beschriebenen Konzeptblätter (mit Namen) und die unbeschriebenen gelben Konzeptblätter (ohne Namen) in den grünen Umschlag.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 100. Viel Erfolg!

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar, dann ist $n + 3$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung zur Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (6 Punkte): Geben Sie eine Gruppe an, deren echte Untergruppen alle zyklisch sind, die aber selber nicht zyklisch ist.

Lösung zur Aufgabe 2:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3 (11 Punkte): Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 30 eine Sylowuntergruppe besitzt, die ein Normalteiler ist.

Lösung zur Aufgabe 3:

Lösung zur Aufgabe 3 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 4 (10 Punkte): Zeigen Sie:

(a) Alle Gruppen der Ordnung 6 sind auflösbar. (4 Punkte)

(b) Alle Gruppen der Ordnung 42 sind auflösbar. (6 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4:

Lösung zur Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 5 (14 Punkte): Man nennt einen Ring A *boolesch*, wenn $x^2 = x$ für alle $x \in A$ gilt. Sei nun A ein boolescher Ring mit 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $2 = 0$ in A (hierbei ist natürlich $2 = 1 + 1$) (3 Punkte)
(b) A ist kommutativ. (4 Punkte)
(c) Ist I ein Ideal in A, so ist auch der Ring A/I boolesch. (1 Punkt)
(d) Ist A ein Integritätsbereich, so ist A isomorph zum Körper $\mathbb{Z}/(2)$. (3 Punkte)
(e) In A ist jedes Primideal maximal. (3 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 5:

Lösung zur Aufgabe 5 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau **Matrikelnummer: 01/234567**
Platz: PP (links vorne)
Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 6 (11 Punkte): Zeigen Sie, daß die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(a) $32X^5 + 198374X^4 + 11$ (4 Punkte)

(b) $(X + a)^p + ap - a^p$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \not| a$ ist. (7 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 6 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 7 (10 Punkte): Bestimmen Sie die Menge

$$A := \{a \in \mathbb{C} \mid \mathbb{C}[X]/(X^2 + a) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}\},$$

also die Menge aller $a \in \mathbb{C}$, für die Ringe $\mathbb{C}[X]/(X^2 + a)$ und $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ isomorph sind.

Lösung zur Aufgabe 7:

Lösung zur Aufgabe 7 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 8 (9 Punkte): Bekanntlich gibt es bis auf Isomorphie genau einen neunelementigen Körper $\mathbb{F}_9$. Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{F}_3[X]$ so, daß $\mathbb{F}_3[X]/(f) \cong \mathbb{F}_9$.

Lösung zur Aufgabe 8:

Lösung zur Aufgabe 8 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 9 (18 Punkte): Sei $a := \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $p \in \mathbb{Q}[X]$ von a über $\mathbb{Q}$. (4 Punkte)
(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von p in $\mathbb{C}$. (2 Punkte)
(c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(a)$ der Zerfällungskörper von p über $\mathbb{Q}$ ist. (5 Punkte)
(d) Begründen Sie, warum $\mathbb{Q}(a)|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. (2 Punkte)
(e) Beweisen Sie, daß die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(a)|\mathbb{Q}$ zyklisch ist. (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 9:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 9 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 10 (6 Punkte): Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung mit $[L : K]$ ungerade, $a \in L$ und $L = K(a)$. Zeigen Sie $L = K(a^2)$.

Lösung zur Aufgabe 10:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.