Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Seien V und W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei W vollständig. Zeigen Sie, daß auch der normierte Raum $\mathcal{L}(V,W)$ der (stetigen) Operatoren von V nach W vollständig ist.

Anleitung: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(V,W)$. Zeige, daß auch $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in V$ Cauchy-Folgen sind. Definiere $c := \lim_{n\to\infty} \|A_n\|$ und $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ für $x \in V$. Zeige, daß A eine lineare Abbildung ist mit $\|Ax\| \leq c\|x\|$ für $x \in V$. Folgere $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Zeige nun $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A_m - A_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geq N$. Sei $x \in V$ mit $x \neq 0$. Wähle $m \geq N$ mit $\|Ax - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x\|$. Es gilt nun $\|(A - A_n)(x)\| \leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 2: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der konvergenten reellen Folgen, also $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$ ausgestattet mit der durch $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ definierten Norm.

(a) Finden Sie möglichst explizit einen metrischen Raum $X \neq \emptyset$ und einen isometrischen Isomorphismus $\Phi : V \to C^b(X, \mathbb{R})$, wobei $C^b(X, \mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten stetigen Funktionen auf X ausgestattet mit der Supremumsnorm bezeichne.

(b) Folgern Sie aus (a), daß V ein Banachraum ist. Benutzen Sie dazu Aufgabe 6.2 aus der Analysis II, in der bewiesen wurde, daß $C^b(X, \mathbb{R})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3: Wie in Aufgabe 2 auf Blatt 9 bezeichne $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen mit endlichem Träger. Bezeichne $e^{(j)}$ ($j \in \mathbb{N}$) die reelle Folge definiert durch $e_i^{(j)} := \delta_{ij}$ ($i \in \mathbb{N}$), wobei $\delta_{ii} := 1$ und $\delta_{ij} := 0$ für $i \neq j$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 auf Blatt 9, daß
$\Phi : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^* \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \varphi \mapsto (\varphi(e^{(j)}))_{j\in\mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist.

Wir machen $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ zu einem normierten Raum vermöge der Norm $\|.\|_\infty$ aus Aufgabe 2. Weiter bezeichne $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=0}^\infty |a_n| < \infty$. Wir definieren auf $\ell^1(\mathbb{N})$ eine Funktion $\|.\|_1 : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ durch $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_{n=0}^\infty |a_n|$.

(b) Sei $\varphi \in (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^*$. Zeigen Sie $\varphi \in (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})' \iff \Phi(\varphi) \in \ell^1(\mathbb{N})$.

(c) Es bezeichne $\Psi : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})' \to \ell^1(\mathbb{N})$ die bijektive Einschränkung von Φ auf $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})'$. Zeigen Sie $\|\varphi\| = \|\Psi(\varphi)\|_1$ für alle $\varphi \in (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})'$.

(d) Folgern Sie aus (c), daß $\|.\|_1$ eine Norm auf $\ell^1(\mathbb{N})$ ist.

(e) Folgern Sie aus (c) weiter, daß $\ell^1(\mathbb{N})$ ein Banachraum ist.

Zweite Klausur am Dienstag, den 25. Juli, von 10 bis 12 Uhr. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt am 3./4. Juli oder spätestens am 10./11. Juli in den Übungsgruppen.

Abgabe bis Freitag, den 7. Juli, vor Beginn der Vorlesung.