Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- konventionelles Schreibzeug und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen. **Schreiben Sie auf den grünen Bogen Ihre Matrikelnummer (nicht Ihren Namen!) und das Datum (21. Oktober 2006). Die restlichen Felder lassen Sie bitte frei.**

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **11 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. **Als Schmierpapier dürfen nur die in dem grünen Umschlag befindlichen gelben Konzeptblätter benutzt werden. Sie dürfen kein eigenes Papier auf den Tisch legen. Die Konzeptblätter müssen zwar abgegeben werden, haben aber keinen Einfluß auf die Bewertung der Klausur. Vergessen Sie also nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.** Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung oder in den Übungsaufgaben behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Grundlegende Tatsachen aus der Analysis dürfen verwendet werden.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Nach Beendigung der Klausur:

Schreiben Sie auf jedes der beschriebenen gelben Konzeptblätter Ihren Namen (den Rest der Felder können Sie freilassen). Legen Sie den Klausurbogen, die beschriebenen Konzeptblätter (mit Namen) und die unbeschriebenen gelben Konzeptblätter (ohne Namen) in den grünen Umschlag.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 100. Viel Erfolg!

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 1 (10 Punkte): Sei K ein Körper. Seien V und W K-Vektorräume.

(a) Was heißt es, daß eine Abbildung $f : V \to W$ linear ist? (3 Punkte)

(b) Nun seien V und W endlichdimensional. Beschreiben Sie **kurz**, inwiefern eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch eine Matrix dargestellt werden kann (was braucht man dazu, wie gewinnt man die Matrix und wie berechnet man mit Hilfe der Matrix $f(v)$ für $v \in V$?). Verwenden Sie dabei nur wenige mathematische Zeichen und keine Diagramme. (7 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 1:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 1 (Fortsetzung):

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (10 Punkte): Sei K ein Körper, $A \in M_K(m, n)$ eine $m \times n$-Matrix über K und $b \in K^m$ ein (Spalten-)Vektor. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad Ax = b \qquad (x \in K^n \text{ gesucht})$$

und die lineare Abbildung $f : K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$.

(a) Drücken Sie mit Hilfe von f und b aus, wann $(*)$ lösbar ist. (2 Punkte)

(b) In der Vorlesung wurde eine Bedingung an die Ränge der Matrizen

$$A \qquad \text{und} \qquad B := (A\ b)$$

angegeben, die äquivalent zur Lösbarkeit von $(*)$ ist (B ist die erweiterte Koeffizientenmatrix, hat also m Zeilen und $n+1$ Spalten). Geben Sie diese Bedingung an und beweisen Sie die Äquivalenz zur Lösbarkeit von $(*)$. (3 Punkte)

(c) Drücken Sie mit Hilfe von f aus, wann $(*)$ universell (das heißt für alle $b \in K^n$) lösbar ist. (2 Punkte)

(d) Für welche Paare (m, n) gibt es A so, daß $(*)$ universell lösbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Abbildung f. (3 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2:

Lösung zur Aufgabe 2 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Welche der folgenden reellen Matrizen sind (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 25^2 \\ \frac{1}{-2} & 0 & 3^{-1} \\ 625 & \frac{4}{12} & 13 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zur Aufgabe 3:

Lösung zur Aufgabe 3 (Fortsetzung):

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gegeben sei die folgende Matrix $A \in M_{\mathbb{R}}(5,5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist A diagonalisierbar? (1 Punkt)
(b) Bestimmen Sie den Rang von A. (1 Punkt)
(c) Berechnen Sie Spur und Determinante von A (zur Erinnerung: die Spur ist die Summe der Hauptdiagonaleinträge). (2 Punkte)
(d) Geben Sie die Eigenwerte von A mit ihrer jeweiligen Vielfachheit im charakteristischen Polynom an. (4 Punkte)
(e) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. (2 Punkte)

Hinweis: Sie können die einzelnen Teilaufgaben in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Die vorgeschlagene Reihenfolge erfordert besonders wenig Rechenaufwand.

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Eine orthogonale Matrix $A \in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ habe Spur 0 und Determinante 1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $P_A \in \mathbb{R}[T]$ von A.

Lösung zur Aufgabe 5:

Lösung zur Aufgabe 5 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 6 (8 Punkte): Sei $A \in M_{\mathbb{R}}(6,6)$ eine Matrix vom Rang 2 mit charakteristischem Polynom $T^6 - T^5$. Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A.

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 6 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 7 (6 Punkte): Zeigen Sie, daß die folgende Matrix positiv definit ist:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Lösung zur Aufgabe 7:

Lösung zur Aufgabe 7 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 8 (10 Punkte): Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Ring der Polynome in X mit Koeffizienten aus K.

(a) Erläutern Sie, warum dieser Ring faktoriell ist. (5 Punkte)

(b) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel, welche haben eine Nullstelle in K? (5 Punkte)

(1) $p_1 := X^4 + X^2 + 1$ mit $K = \mathbb{R}$,
(2) $p_2 := X^2 + X + 1$ mit $K = \mathbb{R}$,
(3) $p_3 := X^3 - 2$ mit $K = \mathbb{Q}$ und
(4) $p_4 := XY - 1$ mit $K = \mathbb{R}(Y)$ (dem Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{R}[Y]$).

Lösung zur Aufgabe 8:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 8 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 9 (8 Punkte): Sei K ein Körper. Mit K^1 meinen wir K betrachtet als (eindimensionalen) Vektorraum über sich selbst.

(a) Geben Sie alle K-linearen Abbildungen $f : K^1 \to K^1$ an. (2 Punkte)

(b) Geben Sie eine nicht K-lineare Abbildung $f : K^1 \to K^1$ an. (1 Punkt)

(c) Wenn K ein endlicher Körper mit genau q Elementen ist, wieviele lineare Abbildungen $f : K^n \to K^m$ gibt es dann? (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 9:

Lösung zur Aufgabe 9 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 10 (10 Punkte): Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subseteq R$ ein Ideal. In der Vorlesung wurde der Quotientenring R/I („R modulo I") definiert. Die Multiplikation auf R/I wurde durch

$$(a + I)(b + I) := ab + I \qquad (a, b \in R)$$

definiert. Man mußte sich dabei unter anderem überlegen, daß dadurch die Multiplikation *als Abbildung* $R/I \times R/I \to R/I$ *wohldefiniert* ist. Weisen Sie diese Wohldefiniertheit noch einmal nach.

Lösung zur Aufgabe 10:

Lösung zur Aufgabe 10 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 11 (10 Punkte): Sei $E := C([0,1],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Linearform $\varphi : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$. Definieren Sie eine Norm auf E bezüglich derer

(a) φ stetig ist, (4 Punkte)

(b) φ nicht stetig ist. (6 Punkte)

Halten Sie die Begründung jeweils kurz!

Lösung zur Aufgabe 11:

Lösung zur Aufgabe 11 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.