Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei $E := \ell^2(\mathbb{N})$ der Hilbertsche Folgenraum. Sei eine lineare Abbildung $A : E \to E$ definiert durch

(a) $Ax := (x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots)$,

(b) $Ax := (x_0, x_2, x_4, x_6, \dots)$.

Zeigen Sie $A \in \mathcal{L}(E, E)$. Bestimmen Sie jeweils $\|A\|$, A^*, AA^*, A^*A, $\|A^*\|$, Kern und Bild von A und von A^*.

Aufgabe 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $E := C([a, b], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller stetigen Abbildungen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß E vermöge

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b fg := \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad \text{für alle } f, g \in E$$

zu einem Prähilbertraum wird.

(b) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise? Gegen welche Funktion konvergiert sie in E?

(c) Sei $a = -1$ und $b = 1$. Welche der folgenden Linearformen sind stetig?

$$\varphi_1 : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0) \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^1 f$$

(d) Zeigen Sie, daß E bezüglich der durch das gegebene Skalarprodukt induzierten Norm kein Banachraum ist. Nehmen Sie hierzu ohne Einschränkung $a = -1$ und $b = 1$ an. Betrachten Sie die durch

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} (x+1)^n - 1, & x \le 0 \\ x^n, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E. Nehmen Sie an, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergierte in E gegen f. Zeigen Sie dann, daß $f|_{[-1,0]} = -1$ und $f|_{[0,1]} = 0$ gälte im Widerspruch zur Stetigkeit von f.

Zweite Klausur am Dienstag, den 25. Juli, von 10 bis 12 Uhr in den in den Räumen R511 und R513. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt spätestens am 10./11. Juli in den Übungsgruppen.

Abgabe bis Freitag, den 14. Juli, vor Beginn der Vorlesung.