Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Es sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_7.$$

Bestimmen Sie die Fehlstände und das Vorzeichen von σ. Schreiben Sie σ als ein Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 2: Entscheiden Sie für je zwei der folgenden Gruppen, ob sie isomorph sind oder nicht:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, +)$$

Aufgabe 3: Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe vom Index 2 in G, d.h. $\#\{gU \mid g \in G\} = 2$. Zeigen Sie, daß H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, daß für jedes Element $g \in G$ die *Konjugation* mit g

$$\kappa_g : G \to G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

ein Automorphismus von G ist. Man nennt die κ_g ($g \in G$) *innere Automorphismen* von G. Es bezeichne

$$I(G) := \{\kappa_g \mid g \in G\}$$

die Menge der inneren Automorphismen von G und

$$Z(G) := \{a \in G \mid ax = xa \text{ für alle } x \in G\}$$

das *Zentrum* von G. Zeigen Sie:

(a) $I(G)$ bildet mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.

(b) $Z(G)$ ist Normalteiler von G, und die Faktorgruppe $G/Z(G)$ ist isomorph zu $I(G)$.

Abgabe bis Freitag, den 19. Mai, vor Beginn der Vorlesung.