Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Es sei M eine beliebige Menge. Zeigen Sie: Definiert man für beliebige $A, B \subseteq M$

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad \text{und} \qquad AB := A \cap B,$$

so wird die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M zu einem kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 2:

(a) Es sei V ein K–Vektorraum, und es seien U und W Untervektorräume von V, für die gilt $V = U \oplus W$. Zeigen Sie $V/U \cong W$.

(b) Es sei

$$U = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Bleistift und Papier in wenigen Zeilen den Rest bei Division von 5^{4099} durch 7.

Anleitung: Berechnen Sie $5^1, 5^2, 5^4, 5^8, \ldots$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4: Sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) p ist eine Primzahl.

(b) Für alle $n \in \{1, \ldots, p-1\}$ gilt

$$(*) \qquad n^{p-1} \equiv 1 \qquad \text{modulo } p.$$

In Aufgabe 3 sollte klar geworden sein, wie man $(*)$ für ein festes n schnell testen kann, auch wenn p sehr groß ist. Führt man diesen Test für einige zufällige $n \in \{1, \ldots, p-1\}$ durch und stellt fest, daß $(*)$ jeweils gilt, dann könnte man erwarten, daß p eine Primzahl ist. Führen Sie den Test für $p = 252601$ mit Hilfe eines Rechners für einige zufällig gewählte n durch. Die Tatsache, daß $252601 = 41 \cdot 61 \cdot 101$ keine Primzahl ist, zeigt, daß es sich um keinen guten Primzahltest handelt.

Abgabe bis Freitag, den 26. Mai, vor Beginn der Vorlesung.