Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß es ein $B \subseteq V$ gibt derart, daß $S \subseteq B$ und B eine Basis von V ist.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper. Ist S eine Menge, so ist die Menge K^S aller Abbildungen von S nach K ein K-Vektorraum vermöge der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit Skalaren. Für $f \in K^S$ nennen wir $\{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ den *Träger* von f. Die Menge der $f \in K^S$ mit endlichem Träger bildet einen Untervektorraum von K^S, den wir mit $K^{(S)}$ bezeichnen. Sei nun V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(a) S ist eine Basis von V.

(b) $K^{(S)} \to V,\ f \mapsto \sum_{s \in S} f(s)s$ ist ein Isomorphismus.

(c) $V^* \to K^S,\ \varphi \mapsto \varphi|_S$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 3: Sei V ein K-Vektorraum und B eine Basis von V. Für jedes $b \in B$ sei $b^* \in V^*$ definiert durch $b^*(b) = 1$ und $b^*(v) = 0$ für $v \in B \setminus \{b\}$ (vergleiche (c) in Aufgabe 2). Setze $B^* := \{b^* \mid b \in B\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen (a)–(d).

(a) B^* ist linear unabhängig.

Es sei $\varphi \in V^*$ definiert durch $\varphi(b) = 1$ für alle $b \in B$.

(b) $\varphi \in \operatorname{Span}(B^*) \iff B$ endlich

(c) B^* ist eine Basis von V^* genau dann, wenn B endlich ist.

Sei ab jetzt B unendlich. Nach (a), (b) und Aufgabe 1 gibt es eine Basis B' von V^* mit $B^* \dot\cup \{\varphi\} \subseteq B'$. Es sei $L \in V^{**}$ definiert durch $L(\varphi) = 1$ und $L(\psi) = 0$ für alle $\psi \in B' \setminus \{\varphi\}$. Für jedes $v \in V$ sei $\varepsilon_v \in V^{**}$ die Auswertung in v, also $\varepsilon_v : V^* \to K,\ \varphi \mapsto \varphi(v)$. Zeigen Sie:

(d) L liegt nicht im Bild der kanonischen Einbettung $V \to V^{**} : v \mapsto \varepsilon_v$ von V in sein Doppeldual V^{**}.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß je zwei über $\mathbb{C}$ ähnliche reelle quadratische Matrizen A und B auch über $\mathbb{R}$ ähnlich sind.

Hinweis: Schreibe die komplexe Übergangsmatrix Q mit $A = Q^{-1}BQ$ in der Form $Q = R + iS$ mit reellen Matrizen R und S. Zeige $(R + aS)A = B(R + aS)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Überlege, warum $R + aS$ für fast alle $a \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

Abgabe bis Freitag, den 30. Juni, vor Beginn der Vorlesung.