Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik
Erste Klausur zur Linearen Algebra II 24. Juni 2006

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1: (a) Beide Elemente von A sind sowohl maximal als auch minimal. Es hat aber A weder ein größtes noch ein kleinstes Element. Das Supremum von A ist $\mathbb{Z}$, das Infimum ist die leere Menge.

(b) A hat weder maximale noch minimale Elemente und damit auch kein größtes oder kleinstes Element. Wieder ist $\mathbb{Z}$ das Supremum und $\emptyset$ das Infimum.

(b') $A = \emptyset$, also $\sup A = \emptyset$, $\inf A = \mathbb{Z}$ und A hat weder maximale noch minimale Elemente, geschweige denn ein größtes oder kleinstes Element.

(c) A besitzt genau ein maximales Element, nämlich $\{1, 2, 3\}$. Es besitzt genau drei minimale Elemente, nämlich $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$. Es ist $\{1, 2, 3\}$ sogar das größte Element von A, während A kein kleinstes Element besitzt. Das Supremum von A ist $\{1, 2, 3\}$ und das Infimum ist $\emptyset$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2: Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V durch $v \sim w :\Longleftrightarrow \{v, -v\} = \{w, -w\}$ (man sieht sofort, daß $\sim$ in der Tat reflexiv, transitiv und symmetrisch ist). Für $v \in V$ bezeichnen wir mit $\tilde{v} := \{w \in V \mid v \sim w\}$ die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\sim$.

Hilfsbehauptung 1: $\tilde{v} = \{v, -v\}$ für alle $v \in V$.

Beweis: Um $\tilde{v} \subseteq \{v, -v\}$ zu zeigen, sei $w \in \tilde{v}$. Dann gilt $w \sim v$, also $\{w, -w\} = \{v, -v\}$, insbesondere $w \in \{v, -v\}$. Für die andere Inklusion $\{v, -v\} \subseteq \tilde{v}$ ist nur $-v \in \tilde{v}$ zu zeigen. Dies folgt aber aus $\{-v, -(-v)\} = \{-v, v\} = \{v, -v\}$.

Hilfsbehauptung 2: Für alle $0 \neq v \in V$ hat $\{v, -v\}$ genau zwei Elemente.

Beweis: Sei $v \in V$ mit $v = -v$. Zu zeigen ist $v = 0$. Aus $v = -v$ folgt mit $2 := 1 + 1$, daß $2v = (1 + 1)v = v + v = 0$. Da laut Voraussetzung $2 \neq 0$, besitzt 2 im Körper K ein Inverses $\frac{1}{2}$. Es folgt $v = (\frac{1}{2}2)v = \frac{1}{2}(2v) = \frac{1}{2}0 = 0$.

Um zu zeigen, daß die Summe über alle Vektoren in V gleich 0 ist, genügt es zu zeigen, daß für jedes $v \in V$ die Summe über alle Elemente von $\tilde{v}$ gleich 0 ist, denn die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation bilden eine Zerlegung. Dies ist trivialerweise der Fall für $\tilde{0} = \{0\}$. Ist $0 \neq v \in V$, so gilt nach Hilfsbehauptung 1, daß $\tilde{v} = \{v, -v\}$ und nach Hilfbehauptung 2, daß die Summe über die Elemente von $\tilde{v} = \{v, -v\}$ gleich $v - v = 0$ ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, +)$ sind isomorph. Dies ist das einzige Paar von zueinander isomorphen verschiedenen Gruppen, das man aus den gegebenen vier Gruppen bilden kann. Zur Begründung:

Behauptung 1: Durch $x + \mathbb{Z} \mapsto 2x + 2\mathbb{Z}$ wird eine Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ definiert.

Beweis: Man sieht leicht, daß $x \mapsto 2x$ einen Automorphismus der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ definiert. Indem man den kanonischen Epimorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\mathbb{Z},\ x \mapsto x + 2\mathbb{Z}$ dahinterschaltet, erhält man den Gruppenepimorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\mathbb{Z},\ x \mapsto 2x + 2\mathbb{Z}$. Offensichtlich gilt $\ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in 2\mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Aus dem Homomorphiesatz erhält man daher, daß durch $x+\mathbb{Z} \mapsto 2x+2\mathbb{Z}$ (eine Abbildung und) ein Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ definiert wird (injektiv, da wir durch ganz $\ker(\varphi)$ dividiert haben; surjektiv, da φ surjektiv war).

Behauptung 2: $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind nicht isomorph.

Beweis: In $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ hat -1 die Ordnung 2, während es in $(\mathbb{R}, +)$ kein Element einer endlichen Ordnung ungleich 1 gibt.

Behauptung 3: $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ sind nicht isomorph.

Beweis: In $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \cdot)$ hat $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ die Ordnung 2, während es in $(\mathbb{R}, +)$ kein Element einer endlichen Ordnung ungleich 1 gibt.

Behauptung 4: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ sind nicht isomorph.

Beweis: In $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ ist $\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 3, während es in $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ kein Element der Ordnung 3 gibt, denn die einzige reelle dritte Einheitswurzel ist 1.

Es steht nur noch der Nachweis aus, daß $(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, +)$ weder zu $(\mathbb{R}, +)$ noch zu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph ist. Wäre dies der Fall, dann wäre aber auch $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ dazu isomorph, denn die Hintereinanderschaltung von Isomorphismen liefert wieder einen Isomorphismus. Letzteres ist aber aufgrund der Behauptungen 3 und 4 ausgeschlossen.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4: Von den drei Vektoren, durch die U definiert ist, sind die ersten beiden offensichtlich linear unabhängig. Da die ersten beiden Vektoren jeweils in der zweiten Komponente eine 0 haben, kann offensichtlich der dritte nicht in dem durch die ersten beiden aufgespannten Unterraum liegen. Damit gilt $\dim(U) = 3$ und folglich $\dim(\mathbb{R}^4/U) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(U) = 4 - 3 = 1$. In einem eindimensionalen Vektorraum bildet aber jeder Vektor $\neq 0$ eine Basis. Es genügt daher, einen Vektor in $\mathbb{R}^4/U$ zu finden, der nicht der Nullvektor ist. Wir behaupten, daß für den ersten kanonischen Einheitsvektor $e_1 \in \mathbb{R}^4$ gilt $e_1 + U \neq 0$ in $\mathbb{R}^4/U$. Dies ist gleichbedeutend mit $e_1 \notin U$, also damit, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat, was zum Beispiel durch Entwicklung der Determinante von A nach der letzten Spalte folgt:

$$\det(A) = (-1)(-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = -7 - 6 = -13 \neq 0.$$

Also ist $e_1 + U$ eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5: Wir betrachten die durch Mengeninklusion geordnete Menge $X \subseteq \mathcal{P}(V)$ aller Untervektorräume U von V mit $v \notin U$.

Hilfsbehauptung: X besitzt ein maximales Element.

Beweis: Nach dem Korollar zum Zornschen Lemma genügt es zu zeigen, daß $X \neq \emptyset$ und $\bigcup A \in X$ für alle Ketten $A \neq \emptyset$ in X. Wegen $v \neq 0$ gilt $\{0\} \in X$ und somit $X \neq \emptyset$. Sei nun $A \subseteq X$ eine nichtleere Kette. Es ist klar, daß $v \notin \bigcup A$, da v in keinem Element von A enthalten ist (wegen der Definition von X und $A \subseteq X$). Um $\bigcup A \in X$ nachzuweisen, muß noch überprüft werden, daß $\bigcup A$ ein Untervektorraum von V ist. Zunächst gilt $0 \in \bigcup A$, da $A \neq \emptyset$ und die Elemente von A Untervektorräume sind und damit selber alle die 0 enthalten. Es ist aber $\bigcup A$ auch abgeschlossen unter Addition: Seien $u, w \in \bigcup A$. Dann gibt es $U, W \in A$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Da A eine Kette ist, gilt $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $U \subseteq W$ an. Da dann $u, w \in W$ und W ein Untervektorraum ist, gilt $u + w \in W \in A$, also $u + w \in \bigcup A$. Schließlich ist $\bigcup A$ abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: Sei $\lambda \in K$ und $u \in \bigcup A$. Dann gibt es ein $U \in A$ mit $u \in U$. Da U ein Untervektorraum ist, gilt $\lambda u \in U \in A$, also $\lambda u \in \bigcup A$.

Nach der Hilfsbehauptung können wir nun U als ein maximales Element von X wählen. Wir behaupten, daß $v + U$ eine Basis von V/U ist. Sicher ist $v + U$ linear unabhängig, da $v \notin U$ nach Definition von X und damit $v + U \neq 0$. Um zu zeigen, daß $v + U$ den K-Vektorraum V/U erzeugt, benutzen wir die Maximalität von U. Sei $w \in V$. Wir zeigen, daß w ein skalares Vielfaches von $v + U$ ist. Falls $w \in U$, so ist das trivial wegen $w + U = 0 = 0(v + U)$. Sei also ab jetzt $w \notin U$. Dann ist $U' := U + Kw$ ein Unterraum, der echt größer als U ist (denn $w \in U' \setminus U$). Wegen der Maximalität von U, muß dann $U' \notin X$ gelten, also $v \in U'$. Es gibt also $u \in U$ und $a \in K$ mit $v = u + aw$. Wäre $a = 0$, so folgte $v = u \in U$ im Widerspruch zu $v \notin U$. Also ist $a \in K^\times$, woraus $w = \frac{1}{a}(v - u)$ und damit $w + U = \frac{1}{a}(v + U)$ folgt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6: Es bildet

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von M bildet. Begründet wird dies durch folgende drei Behauptungen:

Behauptung 1: $x \in M$

Beweis:

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Behauptung 2: x ist linear unabhängig.

Beweis: Ist $n \in \mathbb{Z}$ mit $nx = 0$, so gilt offenbar $2n = 0$ in $\mathbb{Z}$ und daher $n = 0$.

Behauptung 3: x erzeugt M
Beweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7: Sei zunächst $M = A$. Die durch M beschriebene Abbildung ist dann die orthogonale Projektion auf die erste Koordinatenachse. Ist v der Ursprung, so besteht $\mathbb{R}[X]v$ nur aus dem Ursprung. Liegt $v \neq 0$ auf einer der beiden Koordinatenachsen, so ist $\mathbb{R}[X]v$ diese Achse. Liegt v außerhalb dieser beiden Achsen, so gilt $\mathbb{R}[X]v = \mathbb{R}^2$.

Sei nun $M = B$. Die durch M beschriebene Abbildung ist dann eine an der zweiten Koordinatenachse zentrierte Streckung um den Faktor 2. Die für den Fall $M = A$ gegebene Beschreibung von $\mathbb{R}[X]v$ trifft (zufällig) wörtlich auch für $M = B$ zu.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 8: Man faßt V als $K[X]$-Modul auf, indem man $pv := p(f)(v)$ setzt für alle $p \in K[X]$ und $v \in V$. Man wendet nun den Struktursatz für endlich erzeugt Moduln über Hauptidealringen an. Dieser ist anwendbar, da $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist und V laut Voraussetzung als K-Vektorraum, also erst recht als $K[X]$-Modul endlich erzeugt ist. Der besagte Struktursatz liefert, daß V als direkte Summe von $K[X]$-Moduln geschrieben werden kann, die von einem Element $0 \neq v_i \in V$ erzeugt sind:

$$V = K[X]v_1 \oplus \ldots \oplus K[X]v_m$$

Es bezeichne n_i die Dimension von $K[X]v_i$ und n die Dimension von V als K-Vektorraum. Dann gilt $n_1 + \cdots + n_m = n$. Weiter wurde in der Vorlesung ohne Mühe gezeigt, daß $v_i, f(v_i), \ldots, f^{n_i - 1}(v_i)$ eine Basis des K-Vektorraums $K[X]v_i$ bilden. Daher ist

$$\mathfrak{v} := (v_1, \ldots, f^{n_1 - 1}(v_1), \quad \ldots \quad, v_n, \ldots, f^{n_m - 1}(v_n))$$

eine Basis von V bezüglich derer die Matrixdarstellung von f offensichtlich allgemeine Normalform hat.