Universität Konstanz | Fachbereich Mathematik und Statistik
Zweite Klausur zur Linearen Algebra II | 25. Juli 2006
Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 | **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne)

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **6 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Grundlegende Tatsachen aus der Analysis dürfen verwendet werden.
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet). Ausnahme: Verfahren zum Invertieren einer Matrix.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 110 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 40.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1 (12 Punkte): Gegeben sei die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $P_A \in \mathbb{R}[T]$ von A und zerlegen Sie es in Linearfaktoren.
(b) Ist A diagonalisierbar?
(c) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform J von A.
(d) Berechnen Sie J^n für alle $n \in \mathbb{N}$.
(e) Finden Sie eine reelle invertierbare Matrix P mit $A = P^{-1}JP$.
(f) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung zur Aufgabe 1:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 1 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2 (6 Punkte): Von einer Matrix $A \in M_{\mathbb{R}}(6,6)$ sei **nur** bekannt, daß ihr charakteristisches Polynom $(T-2)^4(T+5)^2$ ist, der Eigenraum zum Eigenwert 2 zweidimensional und der Eigenraum zum Eigenwert -5 eindimensional ist. Geben Sie (bis auf Ähnlichkeit) alle Matrizen an, die eine Jordansche Normalform von A sein könnten.

Lösung zur Aufgabe 2:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3 (6 Punkte): Welche der folgenden drei Polynome aus $\mathbb{R}[T]$

(a) sind irreduzibel in $\mathbb{R}[T]$,
(b) sind prim in $\mathbb{R}[T]$,
(c) haben eine Nullstelle in $\mathbb{R}$?

$$f := T^2 - 2T + 4, \qquad g := T^3 - 2T + 7, \qquad h := T^4 + 6T^2 + 5$$

Lösung zur Aufgabe 3:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4 (5 Punkte): Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ als linearen Operator auf dem $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Operatornorm von A, also

$$\|A\| = \inf\{c \in \mathbb{R}_{>0} \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Berechnen Sie $\|A\|$ oder schätzen Sie wenigstens $\|A\|$ nach oben ab.

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5 (6 Punkte): Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der konvergenten reellen Folgen, also $V = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \lim_{i\to\infty} a_i \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$. Offensichtlich ist

$$f_n : V \to \mathbb{R}, (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto a_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element des Dualraums V^*, also $F := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq V^*$. Setze $U := \operatorname{Span}(F) \subseteq V^*$. Zeigen Sie $U \neq V^*$.

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R511, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6 (5 Punkte): Beschreiben Sie den Unterschied zwischen einer Basis, einer Orthonormalbasis und einer Hilbertbasis.

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.