Universität Konstanz | Fachbereich Mathematik und Statistik

Erste Klausur zur Linearen Algebra II | 24. Juni 2006

Name: Erna Musterfrau

Matrikelnummer: 01/234567 | **Übungsgruppe: 1**

Platz: 123 (R711, links vorne)

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **8 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 110 Minuten.
Für jede Aufgabe gibt es 5 Punkte.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist also 40.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1: Bestimmen Sie in der geordneten Menge $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ von folgenden Mengen A jeweils die Menge ihrer maximalen Elemente und die Menge ihrer minimalen Elemente. Entscheiden Sie außerdem jeweils, ob A ein größtes Element, ein kleinstes Element, ein Supremum und ein Infimum hat und geben Sie diese gegebenenfalls an.

(a) $A := \{G, U\}$, wobei $G := 2\mathbb{Z}$ die Menge aller geraden und $U := 2\mathbb{Z} + 1$ die Menge aller ungeraden Zahlen bezeichne

(b) A sei die Menge aller derjenigen Teilmengen von $\mathbb{Z}$, für die weder A noch $\mathbb{Z} \setminus A$ endlich ist.

(b') A sei die Menge aller derjenigen Teilmengen von $\mathbb{N}$, die weder endlich noch unendlich sind. (Statt der Aufgabe (b) wurde „versehentlich“ diese Scherzaufgabe gestellt.)

(c) $A := \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Die Antwort muß ausnahmsweise **nicht** begründet werden!

Lösung zur Aufgabe 1:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, in dem $1+1 \neq 0$ gelte. Sei V ein endlicher K-Vektorraum. Zeigen Sie

$$\sum_{v \in V} v = 0.$$

Lösung zur Aufgabe 2:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3: Entscheiden Sie für je zwei der folgenden Gruppen, ob sie isomorph sind oder nicht:

$$(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot),(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+),(\mathbb{R}/2\mathbb{Z},+)$$

Lösung zur Aufgabe 3:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4: Es sei

$$U = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5: Sei K ein Körper, V ein (**nicht** notwendig endlichdimensionaler) K–Vektorraum und $0 \neq v \in V$. Zeigen Sie, daß es einen Untervektorraum U von V gibt derart, daß $v + U$ eine (einelementige) Basis des Quotientenvektorraums V/U ist.

Hinweis: Benutzen Sie das Korollar zum Zornschen Lemma.

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6: Bestimmen Sie eine Basis des von $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ erzeugten $\mathbb{Z}$–Moduls $M \subseteq \mathbb{Z}^2$.

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 7: Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $M \in \{A, B\}$ (lösen Sie die Aufgabe zunächst für $M = A$, dann für $M = B$). Wir fassen den $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}[X]$-Modul auf vermöge

$$pv := (p(M))(v) \qquad \text{für } p \in \mathbb{R}[X] \text{ und } v \in \mathbb{R}^2.$$

Beschreiben Sie die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto Mv$ und die geometrische Gestalt des von v erzeugten $\mathbb{R}[X]$-Untermoduls $\mathbb{R}[X]v \subseteq \mathbb{R}^2$ (je nachdem, wo v liegt) in möglichst einfachen Worten. Die Antwort muß ausnahmsweise **nicht** begründet werden!

Lösung zur Aufgabe 7:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 1**
Platz: 123 (R711, links vorne) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 8: Sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Weiter sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Beschreiben Sie, welche Schritte in der Vorlesung zu einer Basis $\mathfrak{v}$ von V geführt haben, bei der die Darstellungsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ allgemeine Normalform hat. Gehen Sie nur dann ins Detail, wenn Sie dazu genügend Zeit haben.

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.