Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird):

Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- konventionelles Schreibzeug und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen. **Schreiben Sie auf den grünen Bogen Ihre Matrikelnummer (nicht Ihren Namen!) und das Datum (21. April 2007). Die restlichen Felder lassen Sie bitte frei.**

Nachdem die Klausur eröffnet wird:

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **10 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. **Als Schmierpapier dürfen nur die in dem grünen Umschlag befindlichen gelben Konzeptblätter benutzt werden. Sie dürfen kein eigenes Papier auf den Tisch legen. Die Konzeptblätter müssen zwar abgegeben werden, haben aber keinen Einfluß auf die Bewertung der Klausur. Vergessen Sie also nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.** Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die in der Vorlesung oder in den Übungsaufgaben behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Grundlegende Tatsachen aus der Analysis dürfen verwendet werden.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Nach Beendigung der Klausur:

Schreiben Sie auf jedes der beschriebenen gelben Konzeptblätter Ihren Namen (den Rest der Felder können Sie freilassen). Legen Sie den Klausurbogen, die beschriebenen Konzeptblätter (mit Namen) und die unbeschriebenen gelben Konzeptblätter (ohne Namen) in den grünen Umschlag.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 88. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (8 Punkte): Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beantworten Sie jemandem, der nur die Definition eines K-Vektorraums kennt, in ganz klaren Worten, die folgenden Fragen (sie dürfen auch andere Definitionen als in der Vorlesung verwenden, sofern sie auf dasselbe hinauslaufen):

(a) Was heißt es, daß $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind? (4 Punkte)

(b) Was heißt es, daß $v_1, \ldots, v_n$ den Vektorraum V erzeugen? (4 Punkte)

Ihre Antwort muß nicht lang sein, aber absolut präzise!

Lösung zur Aufgabe 1:

Lösung zur Aufgabe 1 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (8 Punkte): Seien $\bar{v} := (v_1, v_2)$ und $\bar{w} := (w_1, w_2)$ die wie folgt gegebenen Basen des $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in M_{\mathbb{R}}(2, 2)$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Lösung zur Aufgabe 2:

Lösung zur Aufgabe 2 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3 (10 Punkte): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, daß A genau dann über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist, wenn $|a-b| \geq 2$. (4 Punkte)
(b) Zeigen Sie, daß A genau dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, wenn $|a-b| > 2$. (6 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 3:

Lösung zur Aufgabe 3 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 4 (10 Punkte): Die reelle quadratische Matrix A habe das charakteristische Polynom $X^5 - 2X^3 + X$.

(a) Wieviele Zeilen hat A? (1 Punkt)
(b) Was ist die Determinante von A? (1 Punkt)
(c) Was ist die Spur von A? (1 Punkt)
(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheit im charakteristischen Polynom. (2 Punkte)
(e) Seien nun vier reelle quadratische Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom $X^5 - 2X^3 + X$ gegeben, von denen keine zwei zueinander ähnlich sind. Zeigen Sie, daß dann mindestens eine dieser vier Matrizen diagonalisierbar ist. (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4:

Lösung zur Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 5 (8 Punkte): Sei $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ eine Matrix mit lauter Einsen auf der (von oben rechts nach unten links verlaufenden) Nebendiagonalen und Nullen überall sonst. Die i-te Spalte von A ist also der $(n+1-i)$-te Einheitsvektor. Geben Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix an (natürlich mit Beweis)!

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 5 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Sei A eine symmetrische reelle Matrix. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist positiv semidefinit.
(b) Es gibt eine reelle Matrix B mit $A = B^T B$ (hierbei bezeichne B^T die zu B transponierte Matrix).

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 6 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Sei K ein Körper. Für jede quadratische Matrix A über K bezeichne p_A ihr charakteristisches Polynom und q_A ihr Minimalpolynom. Sind A und B zueinander ähnliche quadratische Matrizen über K, so gilt bekanntlich $p_A = p_B$ und $q_A = q_B$. Zeigen Sie, daß die folgende Umkehrung **nicht** immer richtig ist: Sind A und B quadratische Matrizen derselben Größe über K, für die $p_A = p_B$ und $q_A = q_B$ gilt, so sind A und B zueinander ähnlich.

Lösung zur Aufgabe 7:

Lösung zur Aufgabe 7 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Aufgabe 8 (8 Punkte): Sei K ein endlicher Körper mit genau q Elementen. Wieviele eindimensionale Unterräume gibt es dann im K^n?

Lösung zur Aufgabe 8:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 8 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe 9 (8 Punkte): Zeigen Sie, daß für $n \geq 2$ die durch

$$\|x\| := \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

gegebene Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ (Maximums- oder ∞-Norm genannt) nicht von einem Skalarprodukt kommt.

Lösung zur Aufgabe 9:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 9 (Fortsetzung):

Aufgabe 10 (10 Punkte): Sei $E := C([0,1],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Prähilbertraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit dem durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg = \int_0^1 f(x)g(x)dx \qquad (f, g \in E)$$

gegebenen Skalarprodukt. Für jedes $f \in E$ sei $T(f) \in E$ definiert durch

$$T(f) : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ f(2-2x) & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dies definiert offensichtlich einen $\mathbb{R}$-Vektorraumendomorphismus $T : E \to E$.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $f \in E$ gilt $\|T(f)\| = \|f\|$. (4 Punkte)

(b) Ist T injektiv? Ist T surjektiv? Ist T stetig? (6 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 10:

Bitte Rückseite und nächstes Blatt benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 10 (Fortsetzung):

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.