Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1: (a) $v_1, \dots, v_n$ heißen (genau dann) linear unabhängig, wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

(b) $v_1, \dots, v_n$ erzeugen (genau dann) den Vektorraum V, wenn es für alle $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2: Die reine Existenz der gesuchten Matrix A folgt aus der Vorlesung. Ist $\bar{e} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, so gilt offenbar $A = (f(e_1)\ f(e_2))$. Nun gilt

$$f(e_1) = f(v_2) = w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$f(e_2) = f(-v_1 + 2v_2) = -w_1 + 2w_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3: Das charakteristische Polynom von A ist $(X-a)(X-b)+1 = X^2-(a+b)X+ab+1$. Seine Diskriminante ist

$$D := (a+b)^2 - 4(ab+1) = (a-b)^2 - 4.$$

Zu (a). A ist genau dann trigonalisierbar über $\mathbb{R}$, wenn das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ zerfällt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $D \geq 0$, d.h. $(a-b)^2 \geq 4$.

Zu (b). Ist $D > 0$, so hat das charakteristische Polynom zwei verschiedene Nullstellen und A damit zwei verschiedene Eigenwerte. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, gibt es dann eine Basis aus Eigenvektoren. Damit ist für $D > 0$, d.h. für $(a-b)^2 > 4$, A diagonalisierbar. Für $D < 0$ ist nach (a) die Matrix A nicht einmal trigonalisierbar, geschweige denn diagonalisierbar. Es bleibt zu zeigen, daß für $D = 0$, die Matrix ebenfalls nicht diagonalisierbar ist. Sei also $D = 0$. Dann hat A nur einen Eigenwert λ (der Vielfachheit 2). Dann ist A ähnlich zu λI, wobei I die 2×2-Einheitsmatrix bezeichne. Man sieht aber sofort, daß daraus folgt $A = \lambda I$, was absurd ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4: Zu (a). Der Grad des charakteristischen Polynoms stimmt mit der Anzahl der Zeilen (oder Spalten) überein. Also hat A genau 5 Zeilen.

Zu (b) und (c). Die Determinante (Spur) von A ist bis auf das Vorzeichen immer der konstante (zweithöchste) Koeffizient des charakteristischen Polynoms von A. Daher gilt $\det A = \operatorname{tr} A = 0$.

Zu (d). Das charakteristische Polynom von A ist gleich

$$X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X + 1)^2(X - 1)^2.$$

Die Eigenwerte von A sind daher -1 (zweifach), 0 (einfach) und 1 (zweifach).

Zu (e). Wie aus (c) folgt, sind diese vier Matrizen alle jeweils zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ähnlich, auf deren Diagonale nacheinander $-1, -1, 0, 1, 1$ steht. Es gibt nur vier Matrizen in Jordanscher Normalform mit dieser Diagonalen (denn es könnten unterhalb der Diagonalen maximal zwei Einsen stehen, eine im Block zum Eigenwert -1 und eine im Block zum Eigenwert 1). Da die vier Matrizen paarweise unähnlich sind, muß eine von ihnen zu einer Diagonalmatrix ähnlich sein (mit Diagonale $-1, -1, 0, 1, 1$). Das heißt, sie ist diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5: Zunächst ist A symmetrisch und damit diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. Da die Spalten von A paarweise senkrecht aufeinander stehen und normiert sind, ist A auch orthogonal. Also liegen alle Eigenwerte von A in $\{-1, 1\}$. Ist m_{-1} die Vielfachheit des Eigenwertes -1 und m_1 die Vielfachheit des Eigenwertes 1, so gilt offenbar

$$m_1 - m_{-1} = \operatorname{tr} A = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ist also n ungerade, so ist die Diagonalmatrix mit den Elementen

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{n+1}{2}\text{-mal}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n-1}{2}\text{-mal}}$$

auf der Diagonale ähnlich zu A. Ist hingegen n gerade, so ist die Diagonalmatrix mit den Elementen

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{\frac{n}{2}\text{-mal}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{n}{2}\text{-mal}}$$

auf der Diagonale ähnlich zu A.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6: Gelte zunächst (a). Da A symmetrisch ist, gibt es eine reelle orthogonale Matrix P und eine reelle Diagonalmatrix D jeweils derselben Größe mit $A = P^T DP$. Da D und A ähnlich sind, haben sie dieselben Eigenwerte. Deshalb sind wegen (a) alle Eigenwerte (also Diagonaleinträge) von D nichtnegativ und besitzen somit eine Wurzel in $\mathbb{R}$. Auf diese Weise erhält man eine reelle

Diagonalmatrix $\sqrt{D}$ mit $\sqrt{D}^2 = D$. Setzt man nun $B := \sqrt{D}P$, so erhält man

$$A = P^T DP = P^T \sqrt{D}\sqrt{D}P = P^T \sqrt{D}^T \sqrt{D}P = (\sqrt{D}P)^T \sqrt{D}P = B^T B.$$

Damit gilt (b) (sogar mit einer quadratischen Matrix B).

Gelte nun (b), das heißt es gibt eine reelle $m \times n$-Matrix B mit $A = B^T B$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist $v^T Av \geq 0$. Es gilt aber

$$v^T Av = v^T B^T Bv = (Bv)^T Bv \geq 0.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7: Betrachte die zwei reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

in Jordanscher Normalform. Da es sich um untere Dreiecksmatrizen mit derselben Diagonale handelt, gilt $p_A = p_B$. Offensichtlich gilt $A^2 = 0 = B^2$ und damit $q_A = X^2 = q_B$. Aber A und B sind nicht ähnlich, da A aus drei und B aus nur zwei Jordankästchen besteht (ähnliche Matrizen haben dieselbe Jordansche Normalform bis auf Vertauschung der Jordankästchen).

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 8: Bezeichne $\mathcal{U}$ die Menge der eindimensionalen Unterräume des K-Vektorraums K^n. Die Abbildung

$$K^n \setminus \{0\} \to \mathcal{U}, \; v \mapsto Kv$$

ist surjektiv und das Urbild eines Elements von $U \in \mathcal{U}$ ist offenbar $U \setminus \{0\}$. Also hat jedes Urbild eines Elements des Wertebereiches genau $q - 1$ Elemente. Damit ergibt sich

$$\#\mathcal{U} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + 1.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 9: Käme diese Norm von einem Skalarprodukt, so müßte die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

gelten. Ist $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des R^n, so folgte dann aber $2 = \|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 = 2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = 4$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 10: Zu (a). Sei $f \in E$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^2 = \langle T(f), T(f) \rangle &= \int_0^1 T(f)^2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} T(f)^2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 T(f)^2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2-2x)^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 f(2x)^2 dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)^2 dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{2} f(t)^2 dt \\
&= \int_0^1 f^2 = \langle f, f \rangle = \|f\|,
\end{aligned}$$

also $\|T(f)\| = \|f\|$.

Zu (b). Ist $T(f) = 0$, so folgt mit (a) $\|f\| = \|T(f)\| = 0$ und daher $f = 0$. Also ist T injektiv. Es ist aber T nicht surjektiv, denn für alle $f \in E$ gilt $T(f)(0) = f(0) = T(f)(1)$, aber zum Beispiel $\mathrm{id}_{[0,1]} \in E$ und $\mathrm{id}_{[0,1]}(0) \neq \mathrm{id}_{[0,1]}(1)$. Da T nach (a) eine die Norm erhält, ist T trivialerweise stetig mit Operatornorm $\|T\| = 1$.