Université de Rennes 1 *Année 2007-2008*
Master M1 F. Ivorra
M. Schweighofer

Algèbre commutative

Feuille d'exercices 4

Anneaux artiniens, longueurs des modules

Tous les anneaux considérés dans la suite seront supposés commutatifs et unitaires, et tous les homomorphismes d'anneaux seront supposés unitaires. Sauf précisions supplémentaires, la lettre A désignera un tel anneau.

Exercice 1. — Dans un anneau artinien, les puissances des idéaux premiers sont primaires.

Exercice 2. — Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. On note A l'anneau quotient $\mathbb{C}[X]/(P)$.

(a) Déterminer les idéaux premiers de A.
(b) Montrer que A est artinien.
(c) Dans quel cas, A est-il un anneau local ?
(d) Décrire A comme produit d'anneaux locaux.
(e) Montrer que A est de longueur n.

Exercice 3. — Soit M un A-module artinien et u un endomorphisme de M. Si u est injectif, montrer qu'il est bijectif.

Exercice 4. — Soit A un anneau noethérien et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. On pose $k = A/\mathfrak{m}$ et $M = \mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n$ pour un entier $n \geq 1$.

(a) Montrer que M est naturellement muni d'une structure de k-espace vectoriel de dimension finie.
(b) Montrer que M est un A-module artinien et que sa longueur comme A-module est égale à sa dimension comme k-espace vectoriel.

Exercice 5. — Trouver un anneau A et un A-module M tel que M n'est pas simple mais indécomposable (c'est à dire M n'est pas une somme directe de deux modules non-nuls).

Exercice 6. — Comparer les longueurs de $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + X + 1)$ en tant que $\mathbb{Q}[X]$-module et en tant que $\mathbb{Q}$-module. Même question en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 7. — Soit A l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et M un A-module de longueur finie. Montrer que $\ell_A(M) = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Indication. — On admet que d'après le théorème de zéros de Hilbert, tout idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est de la forme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ avec $a_i \in \mathbb{C}$.

Exercice 8. — Soit k un corps et $A = k[X, Y]$. Si $n \geq 1$, on pose $M = A/(X, Y)^n$. Montrer que c'est un A-module de longueur finie et déterminer sa longueur.

Exercice 9. — Soit M un A-module noethérien et $\varphi : M \to M$ un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\ker \varphi^n \cap \operatorname{im} \varphi^n = (0).$$

Exercice 10. — Soit M un A-module artinien et φ un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker \varphi^n + \operatorname{im} \varphi^n = M$.

Sous l'hypothèse supplementaire que M est de longueur finie, montrer que la somme est directe (sans qu'on augmente n).

Exercice 11. — Montrer qu'un module sur un anneau principal est de longueur finie si et seulement s'il est de type fini et de torsion.

Exercice 12. — On dit qu'on anneau R est gradué s'il existe une décomposition $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ où les R_n sont des sous-groupes de $(R, +)$ vérifiant $R_m R_n \subset R_{m+n}$.

(a) Montrer que R_0 est alors un sous-anneau de R. Montrer aussi que $I = \bigoplus_{n \geq 1} R_n$ est un idéal de R.
(b) On suppose que R_0 est noethérien et que R est de type fini comme R_0-algèbre. Montrer que R est noethérien.
(c) Réciproquement, on suppose que R est noethérien. Montrer que R_0 est noethérien. Montrer qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_r \in \bigcup_{n \geq 1} R_n$ tels que $I = (x_1, \dots, x_r)$. Montrer alors par récurrence que

pour tout n, $R_n \subset R_0[x_1, \dots, x_r]$. En déduire que R est une R_0-algèbre de type fini.

(d) On se donne un anneau noethérien A et I un idéal de A. Soit $R(I)$ l'ensemble des polynômes $P \in A[T]$ tels que $P = \sum_n a_n T^n$ avec $a_n \in I^n$. Montrer que R(I) est noethérien.

EXERCICE 13. — Soit $R = \bigoplus_n R_n$ un anneau gradué noethérien. Soit $M = \bigoplus_n M_n$ un R-module gradué (ce qui signifie $R_m M_n \subset M_{m+n}$ pour tous m et n).

(a) Justifier que pour tout n, M_n est un R_0-module. Si M est un R-module de type fini, montrer que M_n est un R_0-module de type fini.

(b) On suppose que R_0 est un anneau artinien. Soit alors
$$P_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{R_0}(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$
On se donne des éléments $x_i \in R_{d(i)}$ tels que $R = R_0[x_1, \dots, x_r]$. Montrer par récurrence sur r qu'il existe $f_M \in \mathbb{Z}[t]$ telle que
$$f(t) = P_M(t) \prod_{i=1}^{r} (1 - t^{d(i)}).$$

(c) On suppose de plus que $d(i) = 1$ pour tout i. Établir qu'il existe un polynôme $\varphi_M \in \mathbb{Q}[t]$ tel que pour tout entier assez grand,
$$\ell_{R_0}(M_n) = \varphi_M(n).$$

EXERCICE 14. — Soit M un A-module et $N \subset M$ un sous-module tel que M/N est de longueur finie. Soit $a \in A$ tel que $\mu_a : M \to M, x \mapsto ax$ est injective et M/xM de longueur finie. Alors
$$\ell_A(M/xM) = \ell_A(N/xN).$$

EXERCICE 15. — Appelons pour le moment une famille $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de A libre si les classes de $a_1, \dots, a_n$ forment une base du R/I-module I/I^2.

(a) La famille $a_1, \dots, a_n$ est libre si et seulement si une égalité $\sum_i r_i a_i = 0$ ($r_i \in A$) n'est possible que si $r_i \in I$ pour tout i.

(b) Si la famille $a_1, \dots, a_n$ est libre et $a_n = bc$ alors les familles $a_1, \dots, a_{n-1}, b$ et $a_1, \dots, a_{n-1}, c$ sont libre et, si de plus R/I est de longueur finie, alors
$$\ell_A(A/I) = \ell_A(A/(a_1, \dots, a_{n-1}, b) + \ell_A(A/(a_1, \dots, a_{n-1}, c).$$

EXERCICE 16. — Soit $I = (a_1, \dots, a_n)$ un idéal dans l'anneau A et A/I de longueur finie. Pour $J = (a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n})$ avec $k_i \in \mathbb{N}_{>0}$, R/J est également de longueur finie et
$$\ell_A(R/J) \leq \ell_A(R/I) \prod_{i=1}^{n} k_i.$$
Si la famille $a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}$ est libre dans le sens de l'exercice précédent alors on a égalité.

EXERCICE 17. — Soit $I_1, \dots, I_n$ des idéaux de l'anneau A qui sont premiers entre eux deux à deux. Si $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$ et R/I est de longueur finie alors $\ell_A(R/I) = \sum_{i=1}^n \ell_A(R/I_i)$.