Übungsblatt 6 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $C \subseteq A$. Zeige, daß die Menge

$$B := \{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \mid n \in \mathbb{N}_0,\ t(x_1, \dots, x_n)\ L\text{-Term},\ c_1, \dots, c_n \in C\}$$

Universum einer Unterstruktur $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ ist. Zeige ferner, daß $\mathcal{B}$ die kleinste Unterstruktur von $\mathcal{A}$ mit $C \subseteq B$ ist.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur, B eine Menge und $i : A \to B$ eine Bijektion. Zeige, daß es dann genau eine L-Struktur $\mathcal{B}$ mit Universum B gibt derart, daß i ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ wird.

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen und $h : A \to B$ eine Abbildung. Zeige:

(a) $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \iff h$ erhält $\mathrm{At}(L)$

(b) $h : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \iff h$ erhält $\mathrm{Ba}(L)$

(c) $h : \mathcal{A} \overset{\cong}{\to} \mathcal{B} \implies h$ ist elementare Einbettung

Aufgabe 4: Sei $L_{\leq}$ die Sprache der geordneten Mengen, in der es nur ein zweistelliges Relationszeichen $\leq$ gibt. Wir fassen geordnete Mengen als $L_{\leq}$-Strukturen auf. Sind dann die geordneten Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ elementar äquivalent? Ist die geordnete Menge $\mathbb{N}_0$ eine elementare Erweiterung von $\mathbb{N}$?

Aufgabe 5: Zeige, daß die Klasse der Körper der Charakteristik 0 in der Sprache L_{R} axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Abgabe bis Montag, den 4. Juni 2007, um 14 Uhr.