

## Übungsblatt 7 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

**Aufgabe 1:** Seien  $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Aus}(L)$  und  $\psi \in \text{Fml}(L)$ . Zeige

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models \varphi \rightarrow \psi.$$

**Aufgabe 2:** Seien  $\Phi \subseteq \text{Aus}(L)$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{Fml}(L)$  und  $c_1, \dots, c_n$   $L$ -Konstantenzeichen, die in  $\Phi \cup \{\varphi\}$  nicht vorkommen. Zeige

$$\Phi \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n) \iff \Phi \models \forall x_1 \dots \forall x_n \left( \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ c_i = c_j}} x_i \doteq x_j \right) \rightarrow \varphi \right).$$

**Aufgabe 3:** Sei  $\Phi \subseteq \text{Aus}(L)$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n), \psi \in \text{Fml}(L)$  und  $c_1, \dots, c_n$  paarweise verschiedene Konstantenzeichen in  $L$ , die in  $\Phi \cup \{\varphi, \psi\}$  nicht vorkommen. Zeige

$$\Phi \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n) \rightarrow \psi \iff \Phi \models (\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi) \rightarrow \psi.$$

**Aufgabe 4:** Eine  $L_{\leq}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  heißt wohlgeordnete Menge, falls  $\leq^{\mathcal{A}}$  eine lineare Ordnung auf  $A$  ist, für die es keine echt absteigende Folge

$$a_1 >^{\mathcal{A}} a_2 >^{\mathcal{A}} a_3 >^{\mathcal{A}} a_4 >^{\mathcal{A}} \dots$$

von Elementen  $a_1, a_2, \dots \in A$  gibt. Zeige, daß die Klasse der wohlgeordneten Mengen nicht axiomatisierbar ist.

**Abgabe** bis Montag, den 11. Juni 2007, um 14 Uhr.