Übungsblatt 2 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Sei L eine Sprache, $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$, $x \in \mathrm{Vbl}$, $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und h eine Belegung in $\mathcal{A}$. Zeige:

(a) $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi[h] \iff (\mathcal{A} \models \varphi[h] \text{ oder } \mathcal{A} \models \psi[h])$
(b) $\mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \psi[h] \iff (\mathcal{A} \models \varphi[h] \implies \mathcal{A} \models \psi[h])$
(c) $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi[h] \iff (\mathcal{A} \models \varphi[h] \iff \mathcal{A} \models \psi[h])$
(d) $\mathcal{A} \models \exists x \varphi[h] \iff$ es gibt $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[h\binom{x}{a}]$

Aufgabe 2: Sei L die Sprache, die nur aus einem zweistelligen Funktionszeichen $\cdot$ besteht. Finde $\varphi \in \mathrm{Aus}(L)$ derart, daß für alle L-Strukturen A gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A} \text{ ist eine Gruppe.}$$

Aufgabe 3: Sei L die Sprache, die nur aus einem zweistelligen Relationszeichen $\sim$ besteht. Finde $\varphi \in \mathrm{Aus}(L)$ so, daß für alle L-Strukturen A gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\sim^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A ist, die A in genau drei Äquivalenzklassen mit 1, 2 und 3 Elementen zerlegt.

Aufgabe 4: Seien h_1 und h_2 Belegungen in der L-Struktur $\mathcal{A}$. Zeige:

(a) Stimmen h_1 und h_2 auf den Variablen des L-Termes t überein, so ist

$$t^{\mathcal{A}}[h_1] = t^{\mathcal{A}}[h_2].$$

(b) Stimmen h_1 und h_2 auf den freien Variablen der L-Formel φ überein, so

$$\mathcal{A} \models \varphi[h_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[h_2].$$

Aufgabe 5: Zeige:

(a) Jeder Ultrafilter auf einer endlichen Menge ist ein Hauptultrafilter.
(b) Jeder freie Ultrafilter auf I enthält den Filter der koendlichen Teilmengen von I.

Abgabe bis Montag, den 7. Mai 2007, um 14 Uhr.