# Übungsblatt 5 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

**Aufgabe 1:** Zeige: Sind $L \subseteq L'$ Sprachen, so gilt $\mathrm{Tm}(L) \subseteq \mathrm{Tm}(L')$ und $\mathrm{Fml}(L) \subseteq \mathrm{Fml}(L')$.

**Aufgabe 2:** Zeige das Koinzidenzlemma: Seien $L \subseteq L'$ Sprachen, $\mathcal{A}$ eine $L'$-Struktur und $\mathcal{B} := \mathcal{A}|_L$. Dann gilt für alle $L$-Terme $t(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \dots, a_n].$$

Außerdem gilt für alle $L$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

**Aufgabe 3:** Sei $\varphi$ eine Formel, $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \dots, t_n$ $L$-Terme, in denen keine Variablen vorkommen, die in $\varphi$ vorkommen. Sei $h$ eine Belegung der $L$-Struktur $\mathcal{A}$. Zeige

$$\mathcal{A} \models \varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)[h] \iff \mathcal{A} \models \varphi[h\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1^{\mathcal{A}}[h] \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ t_n^{\mathcal{A}}[h] \end{pmatrix}].$$

**Aufgabe 4:** Sei $\mathcal{A}$ eine $L$-Struktur, $B := \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq A$, $\#B = m$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Fml}(L(B))$, $y_1, \dots, y_m$ Variablen, die in $\varphi$ nicht vorkommen und

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) := \varphi(\bar{b}_1/y_1, \dots, \bar{b}_m/y_m) \in \mathrm{Fml}(L).$$

Zeige, daß für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt

$$(\mathcal{A}, A) \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m].$$

**Aufgabe 5:** Bezeichne $L_{\mathrm{R}}$ die Sprache der Ringe und $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei $\mathbb{F}_p$ der Körper $\mathbb{Z}/(p)$ aufgefaßt als $L_{\mathrm{R}}$-Struktur. Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{P}$. Zeige, daß das Ultraprodukt

$$\mathcal{A} := \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p \Big/ \mathcal{U}$$

der $\mathbb{F}_p$ nach $\mathcal{U}$ ein Körper der Charakteristik 0 ist.

**Aufgabe 6:** Es bezeichne $L_= := (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ die sogenannte Sprache der reinen Identität, in der es keine Relations-, Funktions- und Konstantenzeichen gibt. Man finde eine Klasse von $L_=$-Strukturen, die abgeschlossen unter elementarer Äquivalenz, aber nicht axiomatisierbar ist.

**Abgabe** bis Dienstag, den 29. Mai 2007, um 14 Uhr.