feuille 3, exo 11 Comme la matrice A est symétrique, elle admet trois valeurs propres (comptées avec multiplicité)

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On a $\operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 0$ et

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0.$$

Par conséquent $\lambda_i \neq 0$. Si $\lambda_3 > 0$ alors $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ en contradiction avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 0$. Si $\lambda_1 < 0$ alors $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ en contradiction avec $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$. On a donc soit $\underline{\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3}$ soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$, la dernière option étant exclue en raison de $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$. On sait que la signature de A est (s^+, s^-) où s^+ est le nombre de valeurs propres de A strictement positives (comptées avec multiplicité) et s^- est le nombre de valeurs propres de A strictement négatives (comptées avec multiplicité). La signature de A est donc $(1, 2)$.

feuille 3, exo 12 Il y a une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D tel que $S = {}^tP D P$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S (comptées avec multiplicité). Que S est définie positive revient à dire que ses valeurs propres sont strictement positive. Donc $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. Mettons $E = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$. Alors E est définie positive et $D = E^2$. On a

$$S = {}^tP D P = {}^tP E^2 P = ({}^tP E P)({}^tP E P) = T^2,$$ mettant

$T := {}^tPEP$ (on utilise ${}^tPP = I_n$, c.-à-d. le fait que P est orthogonale). Comme les valeurs propres de T sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$, T est définie positive.

feuille 3, exo 13 Il faut chercher $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tel que pour $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 2 & a & c \\ 1 & -2 & d \end{pmatrix}$ on a

(a) A est orthogonale et
(b) $\det(A) = 1$.

On sait ou on déduit de la définition d'une matrice orthogonale que

(a) $\Longleftrightarrow$ les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
$\Longleftrightarrow$ les colonnes de A sont orthogonales deux à deux et de norme égale à 1.

Donc on a $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$, c.-à-d.

$$0 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 4 + 2a - 2 \text{ et donc}$$

$$a = -1.$$

Comme la dernière colonnes $\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est orthogonale aux deux autres, on a $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$. Par l'élimination de Gauss on obtient $\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

donc $\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Maintenant on utilise

(b) : $1 = \det(A) = \frac{1}{27} \cdot \frac{d}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{d}{54}(-4-4-4+1-8-8) = -\frac{27}{54} d = -\frac{d}{2}$$

Donc $\frac{d}{2} = -1$ et

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'axe de cette rotation A est l'espace propre de la valeur propre 1 donc le noyau de $A - I_3$, c.-à-d. le noyau de

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -1 \\ 2 & -1-3 & 2 \\ 1 & -2 & -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ L'axe de la rotation est donc la droite passant par l'origine et le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Pour connaître l'angle φ de la rotation on prend un vecteur $v \in \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp$ et on calcule

$$\varphi = \arccos (v \mid Av).$$

Choisissons $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $(v \mid Av) = -\frac{2}{3}$ et

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131{,}81°.$$

<u>feuille 3, problème</u> (1) Si $X^n - q$ avec $q \in E_{n-1}$ est un autre, alors $(q_{n-1}(X^n) - q \mid q_{n-1}(X^n) - q) = 0$ ce qui permet de conclure $q_{n-1}(X^n) - q = 0$, c.-à-d. $q_{n-1}(X^n) = q$ et $P_n = X^n - q$. En effet,

$$(q_{n-1}(X^n) - q \mid q_{n-1}(X^n) - q) = ((X^n - q) - (X^n - q_{n-1}(X^n)) \mid \underbrace{q_{n-1}(X^n) - q}_{\in E_{n-1}}) = 0$$

(2) On a $P_1 = X - \frac{(1|X)}{(1|1)} 1 = X - \frac{1}{2}$,

$$P_2 = X^2 - \frac{(1|X^2)}{(1|1)} 1 - \frac{(X-\frac{1}{2}|X^2)}{(X-\frac{1}{2}|X-\frac{1}{2})}(X-\frac{1}{2})$$

car P_0, P_1 forment une base orthogonale de E_1

$$= X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}(X-\frac{1}{2}) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

et

$$P_3 = X^3 - \frac{(1|X^3)}{(1|1)} 1 - \frac{(X-\frac{1}{2}|X^3)}{(X-\frac{1}{2}|X-\frac{1}{2})}(X-\frac{1}{2}) - \frac{(X^2-X+\frac{1}{6}|X^3)}{(X^2-X+\frac{1}{6}|X^2-X+\frac{1}{6})}(X^2-X+\frac{1}{6})$$

car P_0, P_1, P_2 forment une base orthogonale de E_2

$$= X^3 - \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}}(X-\frac{1}{2}) - \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}}(X^2 - X + \frac{1}{6})$$

$$= X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}$$

(3) C'est clair parce que $P_i \neq 0$, $P_i \perp P_j$ pour $i \neq j$ et $\dim(E_n) = n+1$.

(4) Utilisant (3), on sait que

$$P_n - XP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k | P_n - XP_{n-1})}{(P_k|P_k)} P_k .$$

Il suffit donc de montrer que

$$(P_k | P_n - XP_{n-1}) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-3.$$

En effet, si $0 \leq k \leq n-3$ alors

$$(P_k | P_n - XP_{n-1}) = (P_k|P_n) - (P_k | XP_{n-1})$$

$$= \underbrace{(P_k|P_n)}_{=0} - \underbrace{(\underbrace{XP_k}_{\in E_{n-2}} | P_{n-1})}_{=0} = 0 - 0 = 0.$$

(5) $Q := \prod_{i=1}^{k} (X - a_i) \in E_k$

a_i de multiplicité impair dans P

Il est évident que PQ est un polynôme qui est soit positif soit négatif sur tout l'intervalle $[0,1]$. Donc

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt \neq 0.$$

Si $k < n$ alors ce n'est pas possible car $P \perp E_{n-1}$. Donc $k = n$.

feuille 4, exo 1 ATTENTION : coquille

$$\boxed{+ - |x_3|^2} \rightsquigarrow \boxed{+ 6 |x_3|^2}$$

"$-$" et "6" se trouvent sur la même touche du clavier de Michel. Si on remplace "$-$" par "1" f ne sera pas définie positive.

(1) On voit que

$$q(x) = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^* A x \text{ pour } x \in \mathbb{C}^3$$

où $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ avec $A^* = A$. Donc

$f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x^* A y$

est une forme hermitienne telle que $q(x) = f(x,x)$ pour $x \in \mathbb{C}^3$

La matrice de f dans la base canonique est A.

(2) $q(x) = (\overline{x_1} - i\,\overline{x_2})(x_1 + i x_2)$

$$+ 2|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + 2i\, x_2 \overline{x_3} - 2i \overline{x_2}\, x_3$$

$$= \overline{(x_1 + i x_2)}\,(x_1 + i x_2)$$

$$+ 2(\overline{x_2} + i\overline{x_3})(x_2 - i x_3) + 4|x_3|^2$$

$$= \overline{(x_1 + i x_2)}\,(x_1 + i x_2) + 2\,\overline{(x_2 - i x_3)}\,(x_2 - i x_3) + 4\,\overline{x_3}\, x_3$$

$$= |\underbrace{x_1 + i x_2}_{\ell_1(x_1,x_2,x_3)}|^2 + 2|\underbrace{x_2 - i x_3}_{\ell_2(x_1,x_2,x_3)}|^2 + 4|\underbrace{x_3}_{\ell_3(x_1,x_2,x_3)}|^2.$$

Les formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in (\mathbb{C}^3)^*$ sont linéairement indépendantes. Par l'exercice 8 de la feuille sur la dualité on a

$$\ell_1(x) = \ell_2(x) = \ell_3(x) = 0 \implies x = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^3$. Donc

$$f(x,x) = q(x) = 0 \implies \ell_1(x) = \ell_2(x) = \ell_3(x) = 0 \implies x = 0$$

pour $x \in \mathbb{C}^3$, c.-à-d. f est un produit scalaire hermitien.

(3) Comme $f(x,y) = \overline{\ell_1(x)}\,\ell_1(y) + \overline{\ell_2(x)}\,\ell_2(y) + \overline{\ell_3(x)}\,\ell_3(y)$ pour $x, y \in \mathbb{C}^3$, on obtient une base (v_1, v_2, v_3) qui est orthogonale pour f

si on cherche la base (v_1, v_2, v_3)

qui est duale à la base (l_1, l_2, l_3) de $(\mathbb{C}^3)^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calcul de $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -i & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Donc (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 := u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$v_2 := u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$v_3 := 4u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

est une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour f.

<u>feuille 4, exo 2</u>

$$F = \{ x \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - x_2 + i x_3 = 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{C}^3 \mid \overline{1} \cdot x_1 - \overline{1} x_2 + \overline{(-i)} x_3 = 0 \}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}^{\perp} \text{ d'une part et}$$

$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ d'autre part.

Donc $F^{\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}^{\perp} \right)^{\perp} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$.

En partant de la base $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de F,

on construit maintenant une base orthonormale (v_1, v_2) de F par le procédé de Gram-Schmidt :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(v_1 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} i \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de la projection orthogonale sur F. Les colonnes de P sont les projetés orthogonaux des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
Calculons donc

$$\left(v_1 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) v_1 + \left(v_2 \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) v_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$\left(v_1 \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) v_1 + \left(v_2 \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) v_2 = 0 + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$\left(v_1 \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) v_1 + \left(v_2 \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} i \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2i \\ 2i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2i \\ 2 & 4 & 2i \\ 2i & -2i & 4 \end{pmatrix}.$$

Méthode alternative pour le calcul de P :

On utilise $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $F^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-i\end{pmatrix}$.

Ceci donne $P\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix}1\\-1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ce qui revient à dire

$$P\begin{pmatrix}-i & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et donc}$$

$$P = \begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -i\end{pmatrix}^{-1} = \ldots$$

<u>feuille 4, exo 3</u> (1) C'est facile d'observer qu'il s'agit d'une forme hermitienne. Il reste à montrer que $(P|P) = 0$ implique $P = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Soit donc $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0$. Alors

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{|P(e^{it})|^2}_{\geq 0} dt = 0.$$ Par continuité de P, on obtient $P(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$.

Par le principe d'identité des fonctions holomorphes il s'en suit que $P = 0$.

(2) $(1, X, \ldots, X^n)$ est effectivement une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour ce produit scalaire : Soient $k, l \in \{0, \ldots, n\}$.

Alors $$(X^k | X^l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} e^{ilt} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t} dt = \left\{\begin{matrix} 1 \text{ si } l = k \\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(l-k)t}}{i(l-k)}\right]_{t=0}^{2\pi} = 0 \text{ si } l \neq k\end{matrix}\right\} = \delta_{lk}$$

(3) $P_0 := 1 + \bar{a} X + \bar{a}^2 X^2 + \ldots + \bar{a}^n X^n$

$$\langle P_0 | X^k \rangle = \sum_{\ell=0}^{n} a^\ell \underbrace{\langle X^\ell | X^k \rangle}_{=\delta_{\ell k}} = a^k$$

pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. Donc

$$\left\langle P_0 \middle| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k \quad \text{pour } \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C},$$

c.-à-d. $\langle P_0 | Q \rangle = Q(a)$ pour tout $Q \in \mathbb{C}_n[X]$,

en particulier $\langle P_0 | Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in F$.

On obtient ainsi $F = P_0^{\perp}$. Mettons

$\varphi_0 := \frac{P_0}{\|P_0\|}$ et choicissons une base

orthonormale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de $F = \varphi_0^{\perp}$.

Alors $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

comme souhaitée. Finalement on calcule

$$\|P_0\| = \sqrt{\langle P_0 | P_0 \rangle} = \sqrt{\sum_{k,\ell=0}^{n} \langle \bar{a}^k X^k | \bar{a}^\ell X^\ell \rangle} = \sqrt{\sum_{k,\ell=0}^{n} a^k \bar{a}^\ell \delta_{k\ell}}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a^k \bar{a}^k} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a|^{2k}} \quad \text{pour}$$

expliciter

$$\varphi_0 = \frac{1 + \bar{a} X + \bar{a}^2 X^2 + \ldots + \bar{a}^n X^n}{\sqrt{1 + |a|^2 + |a|^4 + \ldots + |a|^{2n}}}$$

(4) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ avec $\|P\| = 1$. Alors on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|P(a)| \overset{(3)}{=} |\langle P_0 | P \rangle| \leq \|P_0\| \cdot \|P\| = \|P_0\|$$

avec égalité si $P = \varphi_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|}$. Donc

$$\sup\{|P(a)| \mid P \in \mathbb{C}_n[X], \|P\| = 1\} = \|P_0\| = \sqrt{1+|a|^2+\ldots+|a|^{2n}}$$

<u>feuille 4, exo 4</u> Même pour $n=1$ les matrices hermitiennes ne forment pas un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ (car $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-$\mathbb{C}$-espace de $\mathbb{C}$). C'est évident qu'il forment un sous-espace vectoriel réel S de $M_n(\mathbb{C})$ et que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-2} \times \ldots \times \mathbb{C} &\longrightarrow S \\ \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{23} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, a_{nn} \right) &\longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Donc
$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} S &= \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n-1} \times \ldots \times \mathbb{C}) \\ &= n + 2((n-1) + \ldots + 1) \\ &= n + 2\,\frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2 \end{aligned}$$

feuille 4, exo 5 On a

$$M = \underbrace{\tfrac{1}{2}(M+M^*)}_{H} + i\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}(-i)(M-M^*)}_{L}\Big)$$

et $2H^* = (M+M^*)^* = M^* + M = M + M^* = 2H$,

$2L^* = i(M-M^*)^* = i(M^*-M) = (-i)(M-M^*) = 2L$.

Réciproquement, si on a

$$M = H + iL \quad \text{avec} \quad H, L \in M_n(\mathbb{C}),\ H^* = H,\ L^* = L,$$

alors $M + M^* = H + iL + H^* - iL^*$

$= H + H + i(L-L) = 2H$

et $(-i)(M-M^*) = (-i)(H + iL - H^* + iL^*)$

$= (-i)(H - H + i(L+L))$

$= 2L$.

Ceci montre l'existence et l'unicité du couple (H, L). On a

$M^*M = MM^* \iff (H^*-iL^*)(H+iL) = (H+iL)(H^*-iL^*)$

$\iff H^*H + iH^*L - iL^*H + L^*L$

$= HH^* - iHL^* + iLH^* + LL^*$

$\iff H^2 + iHL - iLH + L^2$

$= H^2 - iHL + iLH + L^2$

$\iff HL = LH$.

<u>feuille 4, exo 6</u> On peut écrire

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{C}.$$

Comme U est unitaire on a

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$,

$|a|^2 + |b|^2 = 1$ et

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -\overline{\beta} \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$U = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda(-\overline{\beta}) \\ \beta & \lambda\overline{\alpha} \end{pmatrix}$. Pour déterminer λ

on considère

$$1 = \det(U) = \lambda \det\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}_{=1} = \lambda.$$

<u>feuille 4, exo 7</u> $\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & i & -i \\ -i & 4-\lambda & 1 \\ i & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$= -(\lambda-5)^2(\lambda-2)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$

Espace propre associé à la valeur propre 5 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Espace propre associé à la valeur propre 2 : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ces deux espaces propres sont orthogonaux parce que A est hermitienne. Pour obtenir une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres de A, il suffit donc d'assembler des bases orthogonaux $\underbrace{\text{de}}_{(v_1, v_2) \text{ et } v_3}$ $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On peux mettre $V_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour calculer v_1 et v_2 on applique le procédé de Gram-Schmidt : $U_1 := \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$U_2 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle v_1 \,\middle|\, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 := \frac{\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $$(v_1, v_2, V_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{pmatrix} -i\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonomale de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A. La matrice

$$U := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & i & i\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est donc unitaire. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Alors U est la matrice de passage $(v_1, V_2, V_3) \longrightarrow (e_1, e_2, e_3)$. Donc forcement

$$U^{-1} A U = U^* A U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ce qu'on peut vérifier si on se méfie).

feuille 4, exo 8

(1)
$$C\begin{pmatrix}1\\ \zeta^k\\ \zeta^{2k}\\ \vdots\\ \zeta^{(n-1)k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{\ell=0}^{n-1}c_\ell\zeta^{\ell k}\\ \zeta^k\sum_{\ell=0}^{n-1}c_\ell\zeta^{\ell k}\\ \vdots\\ \zeta^{(n-1)k}\sum_{\ell=0}^{n-1}c_\ell\zeta^{\ell k}\end{pmatrix}=\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}c_\ell\zeta^{\ell k}\right)\begin{pmatrix}1\\ \zeta^k\\ \zeta^{2k}\\ \vdots\\ \zeta^{(n-1)k}\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix}1\\ \zeta^k\\ \vdots\\ \zeta^{(n-1)k}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\sum_{\ell=0}^{n-1}c_\ell\zeta^{\ell k}$.

(2) Si n ne divise pas k, alors $\zeta^k-1\neq 0$ et donc

$$1+\zeta^k+\zeta^{2k}+\dots+\zeta^{(n-1)k}=\frac{\zeta^{nk}-1}{\zeta^k-1}=\frac{0}{\zeta^k-1}=0.$$

(3) Dans (1) on a vu que les n vecteurs

$$v_k:=\begin{pmatrix}1\\ \zeta^k\\ \vdots\\ \zeta^{(n-1)k}\end{pmatrix}\qquad (k\in\{0,\dots,n-1\})$$

sont des vecteurs propres pour C. Si $k,\ell\in\{0,\dots,n-1\}$ avec $k\neq\ell$ alors

$$\langle v_k,v_\ell\rangle=\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{-mk}\zeta^{m\ell}=\sum_{m=0}\zeta^{m(\ell-k)}=0$$

par (2) car n ne divise pas $\ell-k$.

(4) Bien sûr. Par (3) il existe une matrice unitaire U tel que $U^*CU=:D$ est diagonale.

Donc
$$\begin{aligned}C^*C&=(UDU^*)^*(UDU^*)\\&=UD^*U^*UDU^*=UD^*DU^*\\&=UDD^*U^*=UDU^*UD^*U^*\\&=CC^*.\end{aligned}$$