Feuille d'exercices n^{o}1.
Etude de fonctions.

Domaine d'étude

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et éventuellement réduire le domaine d'étude :
   (a) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+12}}$;
   (b) $f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)^2$;
   (c) $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ (montrer que le point $(-1,-1)$ est centre de symétrie).

Dérivées, sens de variation

2. On note f l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 4\,x^3 - 3\,x - 1.$$
Tracer le tableau de variations de f.

3. Une population de bactéries a la taille $A\,e^{t/\tau}$ où A et τ sont des constantes. Quel est le taux de croissance au temps $t = \tau$?

Limites et asymptotes

4. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
   (a) $-2x^2 + 2x + 1$ en $+\infty$;
   (b) $\dfrac{-x+1}{3x^2+x+1}$ en $+\infty$;
   (c) $x - \sqrt{x}$ en $+\infty$;

5. Einstein a montré que la masse d'un corps est fonction de sa vitesse ; si c est la vitesse de la lumière ($c = 300000\,km\,s^{-1}$) et v est la vitesse du corps, la masse de ce corps est
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
où v est exprimé en $km\,.\,s^{-1}$ et $0 \leq v < c$.
   (a) Expliquer pourquoi la constante m_0 est la masse du corps au repos.
   (b) Etudier la limite éventuelle de $m(v)$ lorsque v tend vers c.

6. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+3x+1}{x^2-1}\ln(x)$ et soit C la courbe de f dans un repère orthonormé. Etudier les branches infinies de f au voisinage des bornes de son domaine de définition.

Etude de fonctions, applications diverses

7. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$ et représenter son graphe dans un repère orthonormé.

8. Tout échantillon radioactif se désintègre spontanément de telle sorte que le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon décroît en fonction du temps selon la loi $N = N_0 e^{-\lambda t}$ où N_0 est le nombre de noyaux à $t = 0$ et λ une constante caractéristique de l'échantillon.
   (a) Montrer que le temps nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux (appelé période ou demi-vie) est $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$. En déduire que l'on peut écrire $N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$.
   (b) Le Polonium 210 a une période $T = 138$ jours. Evaluer le pourcentage de noyaux radioactifs encore présents au bout d'un an.

9. On injecte un médicament par voie intraveineuse à un malade (ici une dose de 200 ml). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml) :

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
$C(t)$	11.0	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8

On montre que la concentration C suit une loi exponentielle :

$$C(t) = f(t) \text{ où } f(t) = Q\, e^{-\gamma t}$$

ici γ vaut $75\,.\,10^{-3}$.
   (a) D'après le tableau, que vaut Q ?
   (b) Donnner le sens de variations de f. Est-ce en accord avec les mesures expérimentales ?
   (c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   (d) Tracer la courbe de f.
   (e) On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t, c'est à dire

$$C(t + T) = C(t)/3.$$

   Vérifier que T ne dépend pas de t et exprimer T en fonction de γ.

Compléments.

10. En biologie, la taille de certaines espèces évolue en fonction du temps selon une 'fonction de Gompertz'

$$f : t \mapsto k\, e^{-Ae^{-Bt}}.$$

Etudier la fonction f sur $[0, +\infty[$ et sa courbe (on prendra $k = 6$, $A = 2$, $B = 0.5$).

11. Dans certaines circonstances, une rumeur se répand suivant l'équation

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

où $p(t)$ est la proportion de la population au courant de la rumeur au moment t et où a et k sont des constantes positives.
   (a) Calculer $\lim_{t\to+\infty} p(t)$.
   (b) Quelle est la vitesse de la propagation de la rumeur ?
   (c) Dessiner la courbe représentative de p dans le cas $a = 10, k = 0,5$.