Corrigé de la feuille 4.

1. Soit C une constante réelle et la fonction f_C définie par

$$f_C(x) = \frac{(2\ln x) + C}{x}.$$ Alors

$$f_c'(x) = \frac{x\,\frac{2}{x} - 2\ln x - C}{x^2}.$$ Donc

$$x^2 f_c'(x) + x f_c(x) = 2 - 2(\ln x) - C + 2(\ln x) + C = 2.$$

2. (a) $\frac{y'(x)}{y(x)} = -\sin x$

$$\ln|y(x)| = \int -\sin x\, dx = \cos x + c_0$$

$$y(x) = c\, e^{-\cos x}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -y(x)\sin(x)$ sont donc les fonctions f_c données par

$$f_c(x) = c\, e^{-\cos x} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Pour vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul on peut calculer

$$f_c'(x) = c\, e^{-\cos x}(-\sin x) = -f_c(x)(\sin x).$$

(b) $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{\tan x}$

$$\log |y(x)| = \int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin' x}{\sin x}\,dx$$

$$= \log |\sin x| + c_0 .$$

$$y(x) = c \cdot \sin x$$

Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) \tan(x) = y(x)$ sont donc les fonctions f_c données par

$f_c(x) = c \cdot \sin x$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Si on veut on peut le vérifier :

$f_c'(x) = c \cos x$ et donc

$$f_c'(x) \tan x = c \cdot (\cos x) \frac{\sin x}{\cos x} = c \cdot \sin x = f_c(x).$$

(c) On résout d'abord l'équation différentielle homogène associée :

(H) $y'(x) = y(x)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

$$\ln |y(x)| = \int 1\,dx = x + c_0$$

$$y(x) = c\,e^x$$

Les solutions de (H) sont donc les

fonctions h_c données par

$$h_c(x) = c e^x.$$

Maintenant on détemine une solution de

$$(*) \quad y'(x) = y(x) + e^{3x}$$

par variation de la constante c,

c.-à-d. on cherche une <u>fonction</u> c tel que

$f(x) = c(x) e^x$ resout $(*)$:

$$f'(x) = c'(x) e^x + c(x) e^x$$

Donc $(*)$ se réecrit

$$c'(x) e^x + c(x) e^x = c(x) e^x + e^{3x}$$

$$c'(x) e^x = e^{3x}$$

$$c'(x) = e^{2x}$$

$$c(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

On obtient ainsi que la fonction f donnée par

$f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} e^x = \frac{1}{2} e^{3x}$ est une solution particulière

de $(*)$ [si on veut on le vérifie :

$f'(x) = \frac{3}{2} e^{3x} = \frac{1}{2} e^{3x} + e^{3x} = f(x) + e^{3x}$].

Les solutions de $(*)$ sont donc les fonctions

$f + h_c$ avec $c \in \mathbb{R}$, c.-à-d.

$$\frac{1}{2} e^{3x} + c e^x \quad (c \in \mathbb{R}).$$

On résout d'abord

(H) $y'(x) = y(x)$.

Comme dans l'exercice précédant les solutions sont les fonctions h_c données par $h_c(x) = c\,e^x$. Maintenant on traite

$(*)$ $y'(x) = y(x) - 1 - e^x$ par variation de la constante : Si $f(x) = c(x)e^x$ remplit $(*)$, alors

$$c'(x)e^x + c(x)e^x = c(x)e^x - 1 - e^x$$

$$c'(x)e^x = -1 - e^x$$

$$c'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$c(x) = -\int (e^{-x} + 1)\,dx = e^{-x} - x$$

Donc $f(x) = (e^{-x} - x)e^x = 1 - xe^x$ est une solution particulière de $(*)$. Les solutions de $(*)$ sont donc les fonctions $f + h_c$ avec $c \in \mathbb{R}$, c.-à-d.

$$1 + (c - x)e^x \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(e) On cherche d'abord toutes les solutions de

(H) $y'(x) = 2x\,y(x)$.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x$$

$$\ln|y(x)| = \int 2x\,dx = x^2 + c_0$$

$y(x) = c\, e^{x^2}$

Les solutions de (H) sont donc

$$c\, e^{x^2} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

On cherche maintenant <u>une</u> solution de

(*) $y'(x) = 2x\, y(x) + x^3$

par variation de la constante.

$$c'(x)\, e^{x^2} + c(x)\, 2x\, e^{x^2} = 2x\, c(x) e^{x^2} + x^3$$

$$c'(x)\, e^{x^2} = x^3$$

$$c'(x) = x^3 e^{-x^2}$$

$$c(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx = -\tfrac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\left(-2x\, e^{-x^2}\right)}_{v'} dx$$

$$= -\tfrac{1}{2} \left(\underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-x^2}}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{e^{-x^2}}_{v} dx \right)$$

$$\left[\int -2x\, e^{-x^2} dx \underset{\substack{\frac{dt}{dx} = -2x \\ -2x\, dx = dt}}{\overset{t=-x^2}{=}} \int e^t dt = e^t = e^{-x^2} \right]$$

$$= -\tfrac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1)$$

Donc $c(x)\, e^{x^2} = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2} (x^2+1) e^{x^2}$

$$= -\tfrac{1}{2} (x^2 + 1)$$

est une solution particulière de (*).

On obtient donc la solution générale de (*) en y ajoutant les solutions de (H) :

$$-\frac{1}{2}(x^2+1)+c\,e^{x^2} \quad (c \in \mathbb{R})$$

3. (a) On résout d'abord l'équation algébrique associée

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ses solutions sont

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

donc $z=2$ et $z=3$ (deux réels distincts).

Les solutions de l'équation différentielle homogène donnée sont donc

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(b) Les solutions de l'équation algébrique associée $z^2 - 9 = 0$ sont $z = \pm 3$.
Comme ce sont deux racines réelles distinctes, les solution de l'équation différentielle homogène donnée sont donc

$$c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(c) $z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$
$= u \pm \omega i$

Les solutions sont donc

$c_1 \exp(ux)\cos(\omega x) + c_2 \exp(ux)\sin(\omega x) = \ldots$ avec $u = 0$ et $\omega = 1$

$\ldots = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

(car les racines sont des nombres imaginaires).

(e) On résout d'abord l'équation différentielle homogène associée

(H) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$

en résolvant l'équation algébrique associée

(A) $z^2 - 4z + 4 = 0$.

Les solutions de (A) sont

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \pm 0.$$

Il n'y a donc qu'une solution double $z = 2$.

Par conséquent les solutions de (H) sont

$$c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

On obtient les solutions de l'équation originelle en y ajoutant une solution particulière. Comme indiqué dans l'exercice on peut tenter de trouver une solution sous forme d'un polynôme. En effet, comme le second membre x^2 est un polynôme de degré 2 et le coefficients devant $y(x)$ n'est pas nul, il existe une solution $f(x)$ qui est un polynôme de degré 2, donc $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$).

On détemine les a_i :

$$f'(x) = 2a_2 x + a_1$$

$$f''(x) = 2a_2$$

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = x^2$$

$$\iff 2a_2 - 8a_2 x - 4a_1 + 4a_2 x^2 + 4a_1 x + 4a_0 = x^2$$

$$\iff \begin{cases} 2a_2 - 4a_1 + 4a_0 = 0 \\ -8a_2 + 4a_1 = 0 \\ 4a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{4} \\ 4a_1 = 2 \\ \frac{1}{2} - 2 + 4a_0 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{cases} a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_0 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$ est une solution particulière et

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

la solution générale.

4. Par la formule donnée, la concentration $[N_2O_5]$ est une solution de l'équation différentielle

$$-y'(t) = -0{,}0005\, y(t).$$

On résout cette équation :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 0{,}0005 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = \frac{1}{2000}$$

$$\ln\left|\frac{y'(t)}{y(t)}\right| = \int \frac{1}{2000}\, dt = \frac{t}{2000} + c_0$$

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2000}} \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

Maintenant on détermine c_1 : On sait que $y(0) = C$ d'où $c_1 = C$, c.-à-d. la concentration $[N_2O_5]$ après T secondes est

$$C e^{T/2000}.$$

5. (a) On résout d'abord l'équation différentielle homogène associée :

(H) $y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$

L'équation algébrique associée à (H)

$$z^2 - z + 1 = 0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

a les solutions

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

donc $z = u \pm \omega i$

avec $u = \frac{1}{2}$ et $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de (H) sont donc

$$c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Comme dans l'exercice 3(e) on cherche maintenant un polynôme de degré 2

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (\text{avec } a_i \in \mathbb{R})$$

qui résout

$$(*) \quad y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6.$$

On détermine les a_i :

$$f'(x) = 2a_2 x + a_1$$

$$f''(x) = 2a_2$$

$$f''(x) - f'(x) + f(x) = x^2 + 6$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2a_2 - 2a_2 x - a_1 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = x^2 + 6$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a_2 - a_1 + a_0 = 6 \\ -2a_2 + a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_0 = 6 + 2 - 2 = 6 \end{array} \right.$$

Donc $x^2 + 2x + 6$ est une solution particulière de $(*)$

et

$$x^2 + 2x + 6 + c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ la solution générale de $(*)$.

(b) Si $f(x) = u(x)\, e^{-2x}$ (où u est un polynôme), alors f est une solution de l'équation différentielle donnée si et seulement si...

$$\left[\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{-2x} - 2u(x)e^{-2x} = (u'(x) - 2u(x))e^{-2x} \\ f''(x) &= (u''(x) - 2u'(x))e^{-2x} - 2(u'(x) - 2u(x))e^{-2x} \\ &= (u''(x) - 4u'(x) + 4u(x))\, e^{-2x} \end{aligned}\right]$$

$$\ldots \quad \begin{aligned} & u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) \\ & + 5(u'(x) - 2u(x)) \\ & + 6u(x) = 1 + x \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad u'(x) + u''(x) = 1 + x.$$

Il suffit donc de choisir le polynôme u de sorte que

$$u(x) + u'(x) = \int (1+x)\, dx = x + \frac{x^2}{2}.$$

Donc on choisit $u(x) = \frac{x^2}{2}$, c.-à-d.

$f(x) = \frac{x^2}{2} e^{-2x}$. Il faut additionner à cette solution particulière f la solution générale de

$$(H) \quad y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

pour trouver la solution générale de l'équation originale.

L'équation algébrique associée

$$z^2 + 5z + 6 = 0$$

a les solutions

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2.}, \text{ c.-à-d.}$$

$z = -3$ et $z = -2$. Comme ce sont deux racines réelles distinctes, la solution générale de (H) est

$$c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

La solution générale de l'équation différentielle de départ est donc

$$\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(c) L'équation homogène associée est

$$(H) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

induisant l'équation algébrique

$$z^2 + 2z + 1 = 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

$$\Longleftrightarrow (z+1)^2 = 0$$

qui n'a qu'une solution (réelle double) $z = -1$.
La solution générale de (H) est donc

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Il faut y additionner des solutions particulières de

$$(*)\quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{x}$$

et $$(**)\quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

(principe de superposition des solutions).

Pour $(*)$ on essaie avec $f(x) = u(x)e^{x}$ où u est un polynôme : Une telle fonction f est une solution de $(*)$ si et seulement si...

$$\left[\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{x} + u(x)e^{x} = (u'(x) + u(x))e^{x} \\ f''(x) &= (u''(x) + u'(x))e^{x} + (u'(x) + u(x))e^{x} \\ &= (u''(x) + 2u'(x) + u(x))e^{x} \end{aligned}\right]$$

... $u''(x) + 2u'(x) + u(x) + 2(u'(x) + u(x)) + u(x) = 1$

$\Longleftrightarrow 4u(x) + 4u'(x) + u''(x) = 1$

On choisit donc $u(x) = \frac{1}{4}$ tel que $f(x) = \frac{e^{x}}{4}$ est une solution de $(*)$.

Quant à $(**)$ on essaie avec $f(x) = u(x)e^{-x}$ où u est un polynôme : Une telle f résout $(**)$ si et seulement si...

$$\left[\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} = (u'(x)-u(x))e^{-x} \\ f''(x) &= (u''(x)-u'(x))e^{-x} - (u'(x)-u(x))e^{-x} \\ &= (u''(x)-2u'(x)+u(x))e^{-x} \end{aligned}\right]$$

$$\ldots \quad u''(x) - 2u'(x) + u(x) + 2(u'(x)-u(x)) + u(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad u''(x) = 1$$

On peut donc choisir $u(x) = \frac{x^2}{2}$, c.-à-d. $f(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$.

La solution générale de l'équation différentielle de départ est donc

$$\frac{e^x}{4} + \frac{x^2}{2}e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

6. On sait que $q(t)$ est une solution de

$$(*) \quad CR\,y'(t) + y(t) = EC.$$

On voit tout de suite que la fonction constante $f(t) = EC$ est une solution particulière de $(*)$. Pour trouver la solution générale de $(*)$ on y ajoute la solution générale de

$$(H) \quad CR\,y'(t) + y(t) = 0$$

Pour trouver celle-ci on manipule (H) comme suit

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{CR}$$

$$\ln|y(t)| = \int -\frac{1}{CR}\,dt = -\frac{t}{CR} + c_0$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{CR}}$$

La solution générale de (*) est donc

$$EC + c_1 e^{-\frac{t}{CR}} \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

En particulier, il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$q(t) = EC + c_1 e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Comme $q(0) = Q$ on obtient une équation pour c_1 en y mettant $t = 0$:

$$Q = EC + c_1, \text{ c.-à-d. } c_1 = Q - EC$$

d'où

$$q(t) = EC - (EC - Q)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

7. Soit à chaque instant t, $f(t) \in [0,1]$ la fraction de ceux qui sont au courant.

(a) On a $\quad f'(t) = \alpha f(t)\,(1-f(t))$

pour une constante α. L'équation différentielle remplis par f est donc

$$y'(t) = \alpha\, y(t)\,(1-y(t)).$$

(b) Si on met $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, alors

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)^2}.$$

Donc $\quad f'(t) = -g'(t)\,f(t)^2 = \dfrac{-g'(t)}{g(t)^2}$

et $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$

d'où

$$\frac{-g'(t)}{g(t)^2} = \frac{e}{g(t)}\left(1-\frac{1}{g(t)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -g'(t) = e\,(g(t)-1)$$

Une équation différentielle verifiée par g est donc

$$(*) \quad y(t) + \frac{y'(t)}{\alpha} = 1$$

(d) On résout d'abord

$$(H) \quad y(t) + \frac{y'(t)}{\alpha} = 0$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\alpha$$

$$\ln |y(t)| = \int -\alpha \, dt = -\alpha t + c_0$$

$$y(t) = ce^{-\alpha t} \quad (c \in \mathbb{R})$$

La solution générale de (H) est donc

$$ce^{-\alpha t} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Évidemment la fonction constante 1 est une solution de (*).

Donc la solution générale de (*) est

$$1 + ce^{-\alpha t} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

En particulier, il existent $\alpha, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + ce^{-\alpha t}}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On sait que

$$f(-8) = \frac{80}{1000} = \frac{2}{25}$$

et $f(12) = \frac{1}{2}$.

Cela nous amène à déteminer c et α :

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{1+ce^{-8\alpha}} \Longleftrightarrow 1+ce^{-8\alpha} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+ce^{-12\alpha}} \Longleftrightarrow 1+ce^{-12\alpha} = 2$$

$$ce^{-8\alpha} = \frac{23}{2} \quad \& \quad ce^{-12\alpha} = 1$$

$$c = \frac{23}{2}e^{8\alpha} \quad \& \quad c = e^{12\alpha}$$

$$\frac{23}{2}e^{8\alpha} = e^{12\alpha}$$

$$e^{4\alpha} = \frac{23}{2}$$

$$4\alpha = \ln\left(\frac{23}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{23}{2}\right) \\ \\ c = e^{3\ln\left(\frac{23}{2}\right)} = \left(\frac{23}{2}\right)^3 \end{array}\right\} ce^{-\alpha t} = \left(\frac{23}{2}\right)^3\left(\frac{23}{2}\right)^{-\frac{t}{4}} = \left(\frac{23}{2}\right)^{3-\frac{t}{4}}$$

Donc $f(t) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{23}{2}\right)^{3-\frac{t}{4}}} = \dfrac{9}{10}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{23}{2}\right)^{3-\frac{t}{4}} \Longleftrightarrow t \sim 15{,}6$$

À 15h36
90% de
la population
saura !