Licence biologie
1ère année, 1er semestre

Année universitaire 2007-2008

Mathématiques - Examen.
Durée : 2 heures
Vendredi 14 décembre à 8 heures

Les documents et la calculatrice sont interdits.

Cet énoncé comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 28}{x - 1}$$

On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) Donner le domaine de définition D de f.
2) Montrer que pour tout x dans D,

$$f'(x) = \frac{3(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$$

3) Etudier le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f.
4) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et compléter le tableau de variations de f.
5) Etudier les branches infinies de f. Préciser les droites asymptotes éventuelles.
6) Donner l'allure de C_f (vous pourrez adapter l'échelle de votre repère si le besoin s'en fait sentir).
7) (bonus) Montrer que le point $(1, 2)$ est centre de symétrie de C_f.

Exercice 2

Une étude sur la pénétration du froid a démontré que la température T au temps t (mesuré en jours) à une profondeur x (mesurée en centimètres) pouvait être modélisée par la fonction :

$$T(x,t) = e^{-x} \times \sin\left(\frac{2\pi}{365}\, t - x\right)$$

a) Calculer $T(0,0)$ et $T(0,365)$ et vérifier que $T(0,0) = T(0,365)$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

b) Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)$. Quelle est la signification physique de cette grandeur ?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = x^2\,e^x$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Soit x un réel strictement positif. Simplifier $e^{\ln(x)}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer
$$\int x\,e^x\,dx.$$
3. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle
$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = 0.$$
On pourra utiliser le résultat de la question 1.
4. Déterminer une solution particulière de l'équation
$$y'(x) - \frac{1}{x}\,y(x) = x^2\,e^x.$$
On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante et le résultat de la question 2.
5. Conclure.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + 4\,y'(x) + 3\,y(x) = 6\,x^2 + 19\,x + 5.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à (E) :
$$y''(x) + 4\,y'(x) + 3\,y(x) = 0.$$
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
On pourra chercher cette solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).