Corrigé de l'examen de l'année précédante.

1. (1) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x-1 \neq 0}_{\text{pour qu'on ne divise pas par zéro}}\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(2) $$f(x) = \frac{3x^2-4x+28}{x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = 3x^2-4x+28$, $v(x) = x-1$,

$u'(x) = 6x-4$, $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v(x)^2} = \frac{(6x-4)(x-1) - 3x^2+4x-28}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{6x^2-6x-4x+4-3x^2+4x-28}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3x^2-6x-24}{(x-1)^2} = \frac{3(x^2-2x-8)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}$$

(3) et (4) $f'(x) = 0 \iff x \in \{-2, 4\}$

$$f(-2) = \frac{48}{-3} = -16$$

$$f(4) = \frac{60}{3} = 20$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\to \infty}{(3x - 4)} + \overset{\to 0}{\left(\frac{28}{x}\right)}}{\underset{\to 1}{1 - \underset{\to 0}{\left(\frac{1}{x}\right)}}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\to -\infty}{(3x - 4} + \overset{\to 0}{\left(\frac{28}{x}\right)}}{1 - \underset{\to 0}{\left(\frac{1}{x}\right)}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overset{\to 27}{(3x^2 - 4x + 28)}}{\underset{\to 0^+}{(x - 1)}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overset{\to 35}{(3x^2 - 4x + 28)}}{\underset{\to 0^-}{(x - 1)}} = -\infty$$

x	$-\infty$		-2		1		4		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-16	$\searrow$	$-\infty$ ‖ ∞	$\searrow$	20	$\nearrow$	∞

(5) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+28}{x^2-x} = 3$

Ainsi la droite d'équation $y=x$ est une direction asymptotique de C_f en ∞. On va chercher s'il y a même une droite asymptote à C_f $y = 3x+c$ en ∞ ($c \in \mathbb{R}$ une constante), c.-à-d. si

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 3x) = c \quad \text{pour un } c \in \mathbb{R}:$$

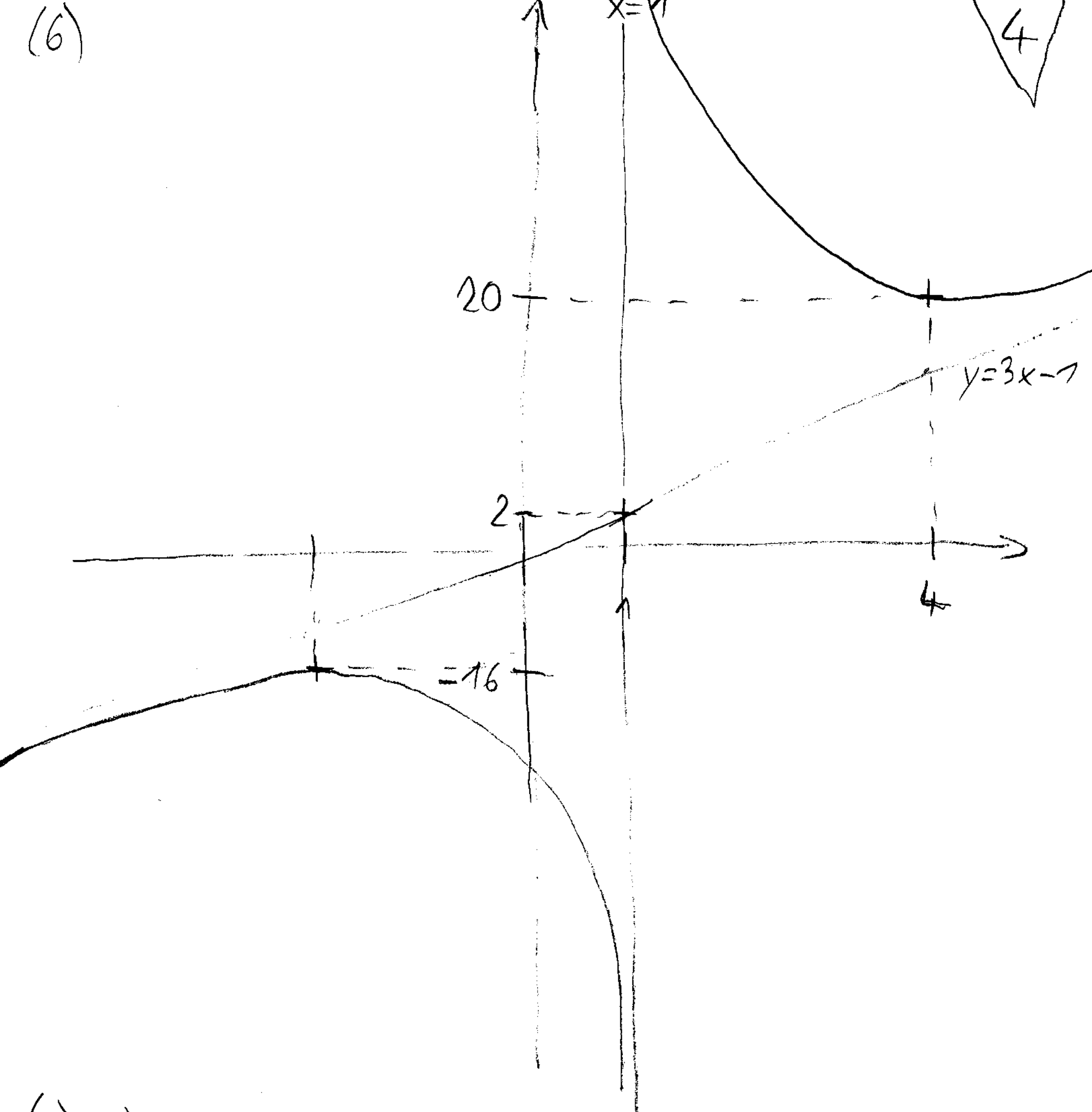
$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-4x+28}{x-1} - 3x \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+28-3x^2+3x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+28}{x-1} = -1$$

Donc la droite d'équation $y = 3x-1$ est une droite asymptote à C_f en ∞.

De la même façon, en calculant les limites respectives en $-\infty$, on obtient que la même droite est une droite asymptote à C_f en $-\infty$ (et donc la droite d'équation $y = x$ une direction asymptotique de C_f en $-\infty$).

(6)



(7) À montrer : $f(1+a)-2 = -(f(1-a)-2)$, c.-à-d.

$$f(1-a)+f(1+a) = 2\cdot 2$$

On calcule : $f(1-a)+f(1+a) =$

$$\frac{3(1-a)^2-4(1-a)+28}{1-a-1} + \frac{3(1+a)^2-4(1+a)+28}{1+a-1} =$$

$$\frac{3(1+a)^2-3(1-a)^2-4(1+a)+4(1-a)}{a} = \frac{12a-8a}{a} = 4$$

2. (a) $T(0,0) = e^{-0}\sin(0) = 1\cdot 1 = 1$

$T(0,365) = e^{-0}\sin(2\pi - 0) = 1\cdot 1 = 1$

d'où $T(0,0) = T(0,365)$

On pouvait s'attendre à ce résultat vu que la température à une profondeur x fixe est une quantité de variation principalement saisonnière et qu'une année dure environ 365 jours.

(b) $$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = e^{-x}\cos\left(\frac{2\pi}{365}t - x\right)\frac{2\pi}{365}$$

$$= \frac{2\pi}{365}e^{-x}\cos\left(\frac{2\pi}{365}t - x\right)$$

est le taux de variation de la température à la profondeur x au temps t d'après le modèle utilisé.

3. (1) $e^{\ln x} = x$

(2) $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int e^x dx = xe^x - e^x$

$= e^x(x-1) = (x-1)e^x$

(3) $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x}$

$x \in]0,\infty[$ par hypothèse

$\ln|y(x)| = \int \frac{1}{x} dx + c_0 = (\ln|x|) + c_0 = (\ln x) + c_0$

$y(x) = c \cdot x \quad (c \in \mathbb{R})$

Les solutions sont donc les fonctions h_c donnée par $h_c(x) = c\,x \quad (c \in \mathbb{R})$.

(4) On cherche une solution f ayant la forme $f(x) = c(x) \cdot x$ pour une fonction c (variation de la constante obtenue dans (3)):

f vérifie l'équation

$\Longleftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = x^2 e^x$

$\Longleftrightarrow c'(x)\,x + \underbrace{c(x) - \frac{1}{x} c(x) \cdot x}_{=0} = x^2 e^x$

$\Longleftrightarrow c'(x) = xe^x$

On peut donc choisir $c(x) = \int x e^x dx \overset{(2)}{=} (x-1)e^x$ pour obtenir la solution particulière f définie par $f(x) = x(x-1)e^x$

(5) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle de depart est formé des fonctions $f + h_c$ $(c \in \mathbb{R})$. La solution générale est donc

$$x(x-1)e^x + cx \quad (c \in \mathbb{R}).$$

4. (1) On résout d'abord l'équation algébrique associée

$z^2 + 4z + 3 = 0$. Ses solutions sont

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$= -2 \pm 1 \quad \text{donc}$$

$$z = -3 \quad \text{et} \quad z = -1.$$

Ce sont deux réels distincts. Donc la solution générale de l'équation sans second membre est

$$c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(2) Comme le second membre est un polynôme de degré 2 et le coefficient devant $y(x)$ n'est pas nul, il existe une solution particulière de (E) qui est un polynôme du même degré 2.

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie (E) :

On calcule d'abord les dérivées :

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a$$

On observe maintenant que

$$f \text{ vérifie } (E)$$
$$\Longleftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 19x + 5$$
$$\Longleftrightarrow 2a + 8ax + 4b + 3ax^2 + 3bx + 3c = 6x^2 + 19x + 5$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + 3c = 5 \\ 8a + 3b = 19 \\ 3a = 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc f définie par $f(x) = 2x^2 + x - 1$ est une solution de (E).

(3) En additionnant les solutions de (1) et (2), on obtient que les fonctions

$$2x^2 + x - 1 + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

sont toutes les solutions de (E).