Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Année 2008-2009

Licence de mathématiques
Intégrale de Lebesgue et analyse de Fourier

Contrôle court n°1

vendredi 3 avril
de 9h30 à 10h00

Les documents sont interdits.

Exercice 1 (5 points). Répondre par **vrai ou faux** en donnant un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 points).

(a) Si on munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne, alors toute fonction mésurable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

(b) Sur un singleton $\mathbb{X} = \{a\}$, il y a exactement deux tribus.

(c) Si μ est la mesure de dénombrement (comptage) sur $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, alors $\int \frac{1}{2^n} d\mu(n) = 2$.

(d) La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est intégrable au sens de Lebesgue.

(e) La fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Exercice 2. (6 points) Soit $\mathscr{X}$ une tribu sur $\mathbb{N}$ et

$$\mu \colon \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+,\ A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$$

Répondre en donnant un court argument (trois lignes grand maximum).

(a) Est-ce que μ est une mesure si $\mathscr{X} = \{\emptyset,\mathbb{N}\}$ est la tribu grossière ?

(b) Est-ce que μ est une mesure si $\mathscr{X} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est la tribu discrète ?

(c) Donner une tribu $\mathscr{X}$ qui n'est ni la tribu grossière ni la tribu discrète pour laquelle μ est une mesure.

(d) Donner une tribu $\mathscr{X}$ qui n'est ni la tribu grossière ni la tribu discrète pour laquelle μ n'est pas une mesure.

Exercice 3 (9 points) Soit $f \in L^2([0,1])$.

(a) Utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que la suite de nombres réels

$$\left(\int_{[0,\frac{1}{n}]} f^2 d\lambda \right)_{n \geq 1}$$

converge vers 0.

(b) En déduire que

$$\lim_{x \to 0, x>0} \int_{[0,x]} f^2 d\lambda = 0.$$

(c) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (b) pour conclure que

$$\lim_{x \to 0, x>0} \frac{\int_{[0,x]} f d\lambda}{\sqrt{x}} = 0.$$