Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 11
18.01.2010

Lineare Algebra I

Aufgabe 11.1:

Sei K ein Körper. Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen. Überprüfen Sie außerdem, ob sie invertierbar sind, und falls ja, bestimmen Sie die zugehörige inverse Matrix.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{Q}$ und für $K = \mathbb{F}_3$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{F}_7$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{F}_7$.

(d)

$$\begin{pmatrix} \mathring{\imath} & 1+5\mathring{\imath} & 3+3\mathring{\imath} \\ 6\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} & 6 \\ 1+\mathring{\imath} & 3+4\mathring{\imath} & 5+4\mathring{\imath} \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{F}_{49} = \mathbb{F}_7[\mathring{\imath}]$.

(e)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ -11 & 7 & -1 & -10 & -2 \\ 13 & -1 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{Q}$ und für $K = \mathbb{F}_5$.

Bitte wenden.

Aufgabe 11.2:

Sei K ein Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Seien $H_1, \ldots, H_r$ Hyperebenen im K^n (vgl. Aufgabe 9.4). Zeigen Sie, dass

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) \geq n - r.$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller Hyperebenen im K^n für den Fall, dass K ein endlicher Körper mit m Elementen ist.

Aufgabe 11.3:

Sei K ein Körper, und sei $d \in \mathbb{N}_0$. Seien weiter $a_1, \ldots, a_n \in K$ paarweise verschieden. Sei $f := E^{(d)}_{a_1,\ldots,a_n} \colon K[X]_d \to K^n$ der Einsetzungshomomorphismus $p \mapsto (p(a_1), \ldots, p(a_n))$. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn $n \geq d + 1$.
(Hinweis: Verwenden Sie ein Ergebnis aus §4 der Vorlesung.)

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn $n \leq d + 1$.
(Hinweis: Konstruieren Sie zuerst Urbilder für die Einheitsvektoren.)

(c) Bestimmen Sie den Rang der Vandermonde–Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4:

Sei K ein Körper. Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ als K–Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Ist $I \subseteq K[X]$ ein Ideal von $K[X]$, so ist $K[X]/I$ ein K–Vektorraum.

(b) Zeigen Sie, dass $V := K[X]/(X^3 - 2X^2 + 1)$ als K–Vektorraum endlich erzeugt ist. Finden Sie eine Basis von V und bestimmen Sie somit die Dimension von V.

(c) Sei $f\colon K[X] \to K[X]$ die lineare Abbildung $p \mapsto Xp$. Zeigen Sie, dass f für jedes Ideal I von $K[X]$ eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon K[X]/I \to K[X]/I$ mit $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$ induziert. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\overline{f}$ für $I = (X^3 - 2X^2 + 1)$ bezüglich der von Ihnen in Teilaufgabe (b) gefundenen Basis.

(d) Sei nun $p \in K[X] \setminus \{0\}$ beliebig mit $\deg p = d$. Bestimmen Sie auch hier eine Basis und die Dimension von $K[X]/(p)$.

Abgabe bis Montag, den 25. Januar, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.