Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 3
02.11.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 3.1:

(a) Es sei $G = \{0 = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ und $+ \colon G \times G \to G$ eine Abbildung. Dabei seien die Elemente $0, a_2, a_3, \dots, a_n$ paarweise verschieden. Die Funktionswerte von $+$ lassen sich durch eine **Additionstafel**, eine Tabelle folgender Form, veranschaulichen.

$+$	0	a_2	a_3	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
0	$0+0$	$0+a_2$	$\dots$				
a_2	a_2+0	$\ddots$					
a_3	$\vdots$						
$\vdots$							
a_j					$a_j + a_i$		
$\vdots$							
a_n							

Sei nun $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0. Auf welche Weise spiegeln sich die folgenden Eigenschaften von $(G, +)$ graphisch in der Additionstafel wider?

(i) Die Kommutativität von $(G, +)$.
(ii) Die Existenz des neutralen Elements 0.
(iii) Die Eigenschaft, dass jedes Element a_i ein inverses Element besitzt.

(b) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Sei $h \in G$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T_h \colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto h + g \end{aligned}$$

bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an. Was sagt die Bijektivität dieser Abbildung über die Zeilen der Additionstafel einer endlichen Gruppe aus?

Aufgabe 3.2:

(a) Seien a, b, c drei paarweise verschiedene Objekte. Seien $G = \{a, b\}$ und $H = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass durch die Additionstafel (i) G und durch die Additionstafel (ii) H zu abelschen Gruppen werden. Was ist jeweils das neutrale Element?

(i)

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

(ii)

$+$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Bitte wenden.

(b) Füllen Sie folgende Tabelle so aus, dass sie Additionstafel einer abelschen Gruppe mit vier Elementen ist. Ist die Lösung (bis auf das Vertauschen der Elemente in der Tabelle) eindeutig?

$+$	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

Aufgabe 3.3:

Sei I eine Menge, und sei für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe $(G_i, +_i)$ gegeben. Sei auf $G := \prod_{i \in I} G_i$ die folgende Operation $+$ definiert:

$$g + h := (\, i \mapsto g(i) +_i h(i) \,).$$

Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3.4:

Welche der folgenden Zuordnungen sind Gruppenhomomorphismen?

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$

(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$

(c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto |x|$

(d) $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\times$, $(x, n) \mapsto x^n$, wobei $\mathbb{R}^\times$ die abelsche Gruppe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sei.

(e) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $B \mapsto B \cap C$. Dabei sei A eine Menge, die Gruppenaddition von $\mathcal{P}(A)$ sei die symmetrische Differenz $\triangle$ (vgl. Aufgabe 1.1) und C sei eine fest gewählte Teilmenge von A.

Abgabe bis Montag, den 9. November, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.