Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 5
16.11.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 5.1:

Sei A ein kommutativer Ring.
Man nennt A einen **Körper**, wenn $0 \neq 1$ in A gilt und es für jedes $a \in A$ ein $b \in A$ mit $ab = 1$ gibt.
Sei I ein Ideal von A. Dann bezeichnen wir $A/\equiv_I$ auch abkürzend mit A/I.

(a) Seien $a, b, b' \in A$ mit $ab = 1 = ab'$. Zeigen Sie, dass dann $b = b'$ gilt. Man nennt b das **multiplikative Inverse** zu a.

(b) Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $(a) := \{ab \mid b \in A\}$ ein Ideal von A ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/(7)$ ein Körper ist.

(d) Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{Z}/(12)$ zwei Elemente $a, b \neq 0$ mit $ab = 0$ gibt.

(e) Untersuchen Sie, ob $\mathbb{Z}/(777)$ ein Körper ist.

Aufgabe 5.2:

Sei A ein kommutativer Ring und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf A.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b \in A$ gilt

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p \in A[X]$ gilt

$$a \equiv b \Rightarrow p(a) \equiv p(b).$$

Aufgabe 5.3:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gibt es genau ein $x \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $a \equiv_{(n)} x$. Wir bezeichnen dieses Element x mit a mod n.
Im folgenden soll kein Taschenrechner benutzt werden und in der Abgabe sollen alle Rechenschritte nachvollziehbar aufgeführt sein. Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

(a) 47 mod 13

(b) 379 mod 21

(c) 1267987658 mod 9

(d) 17^5 mod 10

(e) 379^{101} mod 21

(f) 823^{2009} mod 21

(g) 8903783438^{20567} mod 9

Bitte wenden.

Aufgabe 5.4:

Sei A der kommutative Ring $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ mit der symmetrischen Mengendifferenz als Addition und dem Schnitt als Multiplikation. Sei das Polynom

$$p := (X^3 - X^2 + \{1,3\}X - 1)^3(X - \{1,2\}) \in A[X]$$

gegeben. Berechnen Sie $p(M)$ für jedes $M \subseteq \{1,2,3\}$.

Aufgabe 5.5:

Sei A ein kommutativer Ring. Wir betrachten die abelsche Gruppe $(A^{\mathbb{N}_0}, +)$ aus § 2.1 der Vorlesung bzw. aus Aufgabe 3.3. Die **Faltung** $f * g$ von f und g aus $A^{\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $(f * g)(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i)g(k-i)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Zeigen Sie, dass $(A^{\mathbb{N}_0}, +, *)$ ein kommutativer Ring ist.
2. Berechnen Sie $f \in A^{\mathbb{N}_0}$ mit $(1, -1, 0, 0, 0, \dots) * f = 1$.
3. Berechnen Sie $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ mit $(1, -1, -1, 0, 0, 0, \dots) * f = 1$. Welche berühmte Folge erhalten Sie?

Abgabe bis Montag, den 23. November, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.