Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 11
03.02.2010

Lineare Algebra I

Lösung 11.1:

Voraussetzung: Sei K ein Körper.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_3$. Wir berechnen eine Zeilenstufenform der Matrix. Da es sich hierbei um keine quadratische Matrix handelt, müssen wir uns um Invertierbarkeit keine Gedanken machen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - 2z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 3z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 4z_1 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 5z_1 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 - 6z_1 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 - 7z_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & -z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 3z_1 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 4z_1 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 - 5z_1 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 - 6z_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenoperationen sind sowohl für $K = \mathbb{Q}$ als auch für $K = \mathbb{F}_3$ erlaubt. Die Matrix hat in beiden Fällen Rang 2.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_7$. Wir berechnen die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix und testen dabei gleichzeitig auf Invertierbarkeit.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_2 \\ z_2 & \leftarrow & z_1 - 3z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 3z_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & 2z_3 \\ z_3 & \leftarrow & z_2 - 4z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - 5z_3 \\ z_3 & \leftarrow & 2z_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Die ursprüngliche Matrix hat also Rang 3, und ist somit invertierbar. Die inverse Matrix kann man direkt ablesen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) Sei $K = \mathbb{F}_7$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & 6z_1 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 + z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 2z_2 \\ z_2 & \leftarrow & 2z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 3z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&4&1&2&0\\ 0&1&6&2&2&0\\ 0&0&0&1&3&1\end{array}\right)$$

Somit hat die ursprüngliche Matrix Rang 2, und ist damit nicht invertierbar.

(d) Sei $K = \mathbb{F}_{49} = \mathbb{F}_7[\mathring{\imath}]$.

$$\left(\begin{array}{rrr|ccc} \mathring{\imath} & 1+5\mathring{\imath} & 3+3\mathring{\imath} & 1&0&0\\ 6\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} & 6 & 0&1&0\\ 1+\mathring{\imath} & 3+4\mathring{\imath} & 5+4\mathring{\imath} & 0&0&1\end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & 6\mathring{\imath} z_1\\ z_2 & \leftarrow & z_2+z_1\\ z_3 & \leftarrow & z_3+(6+\mathring{\imath})z_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{lrr|rcc} 1 & 5+6\mathring{\imath} & 3+4\mathring{\imath} & 6\mathring{\imath}&0&0\\ 0 & 3 & 2+3\mathring{\imath} & 1&1&0\\ 0 & 4 & 6+4\mathring{\imath} & 6+\mathring{\imath}&0&1\end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1+(3+5\mathring{\imath})z_2\\ z_2 & \leftarrow & 5z_2\\ z_3 & \leftarrow & z_3+z_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccr|rrc} 1&0&1+2\mathring{\imath} & 3+4\mathring{\imath} & 3+5\mathring{\imath} & 0\\ 0&1&3+\mathring{\imath} & 5 & 5 & 0\\ 0&0&1 & \mathring{\imath} & 1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1+(6+5\mathring{\imath})z_3\\ z_2 & \leftarrow & z_2+(4+6\mathring{\imath})z_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1&0&0 & 5+3\mathring{\imath} & 2+3\mathring{\imath} & 6+5\mathring{\imath}\\ 0&1&0 & 6+4\mathring{\imath} & 2+6\mathring{\imath} & 4+6\mathring{\imath}\\ 0&0&1 & \mathring{\imath} & 1 & 1\end{array}\right)$$

Die ursprüngliche Matrix hat also Rang 3, und ist damit invertierbar. Wir lesen wieder die inverse Matrix ab:

$$\begin{pmatrix} 5+3\mathring{\imath} & 2+3\mathring{\imath} & 6+5\mathring{\imath}\\ 6+4\mathring{\imath} & 2+6\mathring{\imath} & 4+6\mathring{\imath}\\ \mathring{\imath} & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(e) Da es sich hierbei um keine quadratische Matrix handelt, müssen wir uns um Invertierbarkeit keine Gedanken machen. Sei zuerst $K = \mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 7&1&2&5&4\\ 12&6&7&5&9\\ 1&3&1&0&2\\ 4&2&4&0&3\\ -11&7&-1&-10&-2\\ 13&-1&3&10&6\end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_3\\ z_2 & \leftarrow & z_2-12z_3\\ z_3 & \leftarrow & z_1-7z_3\\ z_4 & \leftarrow & z_4-4z_3\\ z_5 & \leftarrow & z_5-(-11)z_3\\ z_6 & \leftarrow & z_6-13z_3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1&3&1&0&2\\ 0&-30&-5&5&-15\\ 0&-20&-5&5&-10\\ 0&-10&0&0&-5\\ 0&40&10&-10&20\\ 0&-40&-10&10&-20\end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & -\frac{1}{30}z_2\\ z_3 & \leftarrow & -\frac{1}{20}z_3\\ z_4 & \leftarrow & -\frac{1}{10}z_4\\ z_5 & \leftarrow & \frac{1}{40}z_5\\ z_6 & \leftarrow & \frac{1}{40}z_6\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_4 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - z_4 \\ z_4 & \leftarrow & z_2 - z_4 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - z_3 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 - z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & 4z_3 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - \frac{4}{6}z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat also Rang 3.
Sei nun $K = \mathbb{F}_5$. Wir können die ersten Zeilenoperationen wir im Fall $K = \mathbb{Q}$ machen. Wir erhalten damit schon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Rang 1.

Lösung 11.2:

Allgemeine Voraussetzung: Sei K ein Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Voraussetzung: Seien $H_1, \ldots, H_r$ Hyperebenen im K^n (vgl. Aufgabe 9.4).
Behauptung:

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i \right) \geq n - r.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach r. Ist $r = 1$, so muss gezeigt werden, dass $\dim(H_1) \geq n - 1$ ist. Dies wurde schon in Aufgabe 9.4 getan. Nehmen wir also an, dass $r \geq 2$ ist und die Aussage für alle natürlichen Zahlen kleiner als r schon bewiesen ist. Wir können also davon ausgehen, dass $\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i \right) \geq n - r + 1$ gilt. Wir benutzen die Dimensionsformel für Untervektorräume und erhalten

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i \cap H_r \right) + \dim \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i + H_r \right) = \dim \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i \right) + \dim (H_r)\,.$$

Wir schätzen ab

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i \cap H_r\right) = \underbrace{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i\right)}_{\geq n-r+1} + \underbrace{\dim\left(H_r\right)}_{=n-1} - \underbrace{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i + H_r\right)}_{\leq n \text{ (da UVR von } K^n)}$$

und erhalten somit

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} H_i \cap H_r\right) \geq n - r + 1 + n - 1 - n = n - r,$$

was die Behauptung beweist.

(b) Sei $a := (a_1, \dots, a_n) \in K^n \setminus \{0\}$. Wir ordnen a die Hyperebene

$$H_a := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\}$$

zu. Nach Definition ist diese Zuordnung $a \mapsto H_a$ von $K^n \setminus \{0\}$ in die Menge der Hyperebenen des K^n surjektiv. Allerdings ist sie nicht injektiv. Zum Beispiel ist $H_a = H_{\lambda a}$ für alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Dies allerdings ist auch die einzige Mehrdeutigkeit: Seien $a, b \in K^n \setminus \{0\}$ mit $H_a = H_b$. Dann ist $\dim\left(H_a \cap H_b\right) = \dim(H_a) = n - 1$ Anderseits ist $H_a \cap H_b$ genau die Lösungsmenge des homogenen Systems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Um eine Lösungsmenge der Dimension $n-1$ zu erhalten, muss der Rang dieser Matrix gleich 1 sein. Also müssen a und b Vielfache voneinander sein. Somit ist die Zuordnung $a \mapsto H_a$ bijektiv, wenn man skalare Vielfachheiten von a ignoriert. Anders formuliert bedeutet dies, dass die Menge der Hyperebenen mit der Menge der (Ursprungs–) Geraden im K^n in Bijektion steht. Diese können wir aber leicht zählen: Der gesamte $K^n \setminus \{0\}$ besteht aus $m^n - 1$ vielen Elementen. Jedes davon liegt auf genau einer Geraden. Umgekehrt liegen auf jeder Geraden $m - 1$ viele Punkte ungleich 0. Also gibt es $m - 1$–mal mehr Punkte im $K^n \setminus \{0\}$ als Geraden. Damit ist die Anzahl der Geraden und damit die Anzahl der Hyperebenen des K^n gleich $\frac{m^n-1}{m-1}$.

Lösung 11.3:

Vorausssetzung: Sei K ein Körper, und sei $d \in \mathbb{N}_0$. Seien weiter $a_1, \dots, a_n \in K$ paarweise verschieden. Sei $f := E^{(d)}_{a_1,\dots,a_n} : K[X]_d \to K^n$, $p \mapsto (p(a_1), \dots, p(a_n))$.

(a) Behauptung: f ist genau dann injektiv, wenn $n \geq d + 1$.
Beweis: Ist f injektiv, so gilt nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass $\dim \operatorname{im}(f) = d+1$ ist. Da aber $\operatorname{im}(f)$ ein Untervektorraum von K^n ist, folgt $d+1 \leq n$. Es gelte nun $n \geq d + 1$. Sei $p \in \ker f$, d.h. $p(a_1) = \cdots p(a_n) = 0$. Aus der Vorlesung ist aber bekannt (§4), dass ein von 0 verschiedenes Polynom vom Grad $\leq d$ höchstens d Nullstelle hat. Da $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden sind, muss somit $p = 0$ gelten. Also ist f injektiv.

(b) Behauptung: f ist genau dann surjektiv, wenn $n \leq d+1$.
Beweis: Ist f surjektiv, so gilt im $f = K^n$, also dim im $f = n$. Damit muss aber nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen $n \leq d+1$ sein.
Es gelte nun $n \leq d+1$. Sei e_i der i-te Einheitsvektor in K^n. Sei

$$p_i := (\prod_{j \neq i} a_i - a_j)^{-1} \prod_{j \neq i} (X - a_j).$$

Dies geht, da $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden sind. Es ist $\deg p = n-1 \leq d$. Außerdem gilt offensichtlich $f(p_i) = e_i$. Sei nun $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$. Dann ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$ ein Urbild von $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Also ist f surjektiv.

(c) Behauptung: Der Rang der Vandermonde–Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^d \end{pmatrix}$$

ist $d+1$, falls $d+1 \leq n$, und n, falls $n \leq d+1$.
Beweis: Die Vandermonde–Matrix ist eine Darstellungsmatrix vonn f (vgl. Vorlesung). Es gilt also, dass der Rang dieser Matrix gleich der Dimension des Bildes von f ist. Ist nun $d+1 \leq n$, so ist nach Aufgabenteil (a) f injektiv, also hat das Bild von f die Dimension $d+1$. Ist $n \leq d+1$, so ist f nach Aufgabenteil (b) surjektiv, also hat das Bild von f die Dimension n.

Lösung 11.4:

Allgemeine Voraussetzung: Sei K ein Körper. Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ als K–Vektorraum.

(a) Behauptung: Ist $I \subseteq K[X]$ ein Ideal von $K[X]$, so ist $K[X]/I$ ein K–Vektorraum.
Es genügt zu zeigen, dass I ein K–Untervektorraum von $K[X]$ ist, dann folgt die Behauptung, da wir schon wissen, dass der Quotient zweier Vektorräume wieder ein ebensolcher ist. Seien $x, y \in I$ und $\lambda \in K$. Es ist $x + y \in I$, da ein Ideal additiv abgeschlossen ist. Weiter ist $\lambda x \in I$, da $\lambda \in K \subset K[X]$ gilt und ein Ideal abgeschlossen unter Multiplikation mit Ringelementen ist.

(b) Behauptung: $V := K[X]/(X^3 - 2X^2 + 1)$ ist als K–Vektorraum endlich erzeugt mit Basis $B = (\overline{1}, \overline{X}, \overline{X^2})$.
Beweis: Einerseits ist B ein Erzeugendensystem von V, denn sei $\overline{p}$ in V, so gibt es $q, r \in K[X]$ mit $\deg r < 3$, so dass

$$p = (X^3 - 2X^2 + 1) \cdot q + r$$

gilt (Division mit Rest). Also ist $\overline{p} = \overline{r}$. Da r aber höchstens vom Grad 2 ist, lässt sich $\overline{r}$ durch die Elemente aus B linear kombinieren.
Bleibt zu zeigen, dass B linear unabhängig ist. Angenommen es wäre $\lambda_0 + \lambda_1 \overline{X} + \lambda_2 \overline{X}^2 = 0 \in V$, dann wäre $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 \in (X^3 - 2X^2 + 1)$. Betrachtet man die Grade der beteiligten Polynome folgt sofort $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 = 0 \in K[X]$ und damit $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also ist B eine Basis von V. Insbesondere folgt $\dim V = 3$.

(c) Voraussetzung: Sei $f\colon K[X] \to K[X]$ die lineare Abbildung $p \mapsto Xp$.
Behauptung: f induziert für jedes Ideal I von $K[X]$ eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon K[X]/I \to K[X]/I$ mit $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)}$.
Beweis: Sei

$$\begin{aligned} \pi\colon K[X] &\longrightarrow K[X]/I \\ p &\longmapsto \overline{p}. \end{aligned}$$

der kanonische Epimorphismus. Wir betrachten die Abbildung $\pi \circ f\colon K[X] \longrightarrow K[X]/I$. Ist $q \in I$, so ist $\pi \circ f(q) = \pi(Xq) = 0$, denn $Xq \in I$. Daher ist $I \subseteq \ker(\pi \circ f)$. Nach dem Homomorphiesatz gibt es also eine Abbildung $\overline{f}\colon K[X]/I \longrightarrow K[X]/I$, mit $\overline{f}(\overline{v}) = \pi \circ f(v) = \overline{f(v)}$, wie gewünscht.
Um die Abbildungsmatrix $M(\overline{f}, B, B)$ zu bestimmen, betrachten wir die Bilder der Basis B unter der Abbildung $\overline{f}$. Es ist

$$\overline{f}(\overline{1}) = \overline{X}, \quad \overline{f}(\overline{X}) = \overline{X^2}$$

Schließlich ist

$$\overline{f}(\overline{X^2}) = \overline{X^3} = \overline{2X^2 - 1} = 2\overline{X^2} - \overline{1}$$

Die vorletzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass $\overline{X^3 - 2X^2 + 1} = 0$ in $K[X]/(X^3 - 2X^2 + 1)$ ist. Es ist also

$$M(\overline{f}, B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Voraussetzung: Sei nun $p \in K[X] \setminus \{0\}$ beliebig mit $\deg p = d$.
Behauptung: $B := \left(\overline{1}, \overline{X}, \overline{X^2}, \dots, \overline{X^{d-1}}\right)$ ist eine Basis von $K[X]/(p)$.
Beweis: Wir argumentieren ganz analog wie im Aufgabenteil (a). Sei $W := K[X]/(p)$ ist. Sei $g \in K[X]$. Division mit Rest zeigt, dass $q, r \in K[X]$ existieren mit $\deg r < d$ und $g = pq + r$. Dann ist $\overline{r} = \overline{g}$ und wegen $\deg r \leq d - 1$ ist $\overline{r} \in \operatorname{span}(B)$. Dies zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von W ist. Seien $\lambda_i \in K$ mit

$$\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \overline{X^i} = 0.$$

Dann ist

$$\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i X^i \in (p)$$

und wegen $\deg p = d$ folgt

$$\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i X^i = 0.$$

Dann aber muss $\lambda_i = 0$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ gelten. Also ist B auch linear unabhängig und damit eine Basis von W. Insbesondere ist $\dim W = d$.