Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 7
16.12.2009

Lineare Algebra I

Lösung 7.1:

Achtung! In der Aufgabe war ein kleiner Fehler: Bei $n < 0$ sollte es natürlich unter der Klammer $(-n)$-mal heißen.

Voraussetzung: Sei K ein Körper.

(a) Behauptung: Die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow K, \quad n \longmapsto \begin{cases} \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{mal}} & \text{falls } n > 0 \\ \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{(-n)-\text{mal}} & \text{falls } n < 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

ist der einzige Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow K$.
Beweis: Es ist nach Definition $\varphi(1) = 1$. Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Ist $n = 0$, so ist $\varphi(n + m) = \varphi(m) = 0 + \varphi(m) = \varphi(n) + \varphi(m)$ und $\varphi(nm) = \varphi(0) = 0 = 0 \cdot \varphi(m) = \varphi(n)\varphi(m)$.
Wir zeigen zuerst, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ stets $\varphi(n + m) = \varphi(n) + \varphi(m)$ gilt. Dafür können nun $n, m \neq 0$ annehmen. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ oder $n, m \in -\mathbb{N}$, so ist klar, dass $\varphi(n + m) = \varphi(n) + \varphi(m)$. Nehmen wir also $n \in \mathbb{N}$ und $m \in -\mathbb{N}$ an. Dann ist

$$\varphi(n) + \varphi(m) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{mal}} + \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{(-m)-\text{mal}}.$$

Ist $n + m = n - (-m) \geq 0$, so ist dies aber $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{(n-(-m))-\text{mal}} = \varphi(n + m)$. Ist $n + m = n - (-m) < 0$, so ist dies gerade $\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{(-m-n)-\text{mal}} = \varphi(n + m)$.

Wir zeigen $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi(-n) = -\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$, genügt es $n \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten. Wir führen hier eine Induktion nach n durch. Dabei sei $m \in \mathbb{Z}$ stets beliebig. Für $n = 0$ haben wir die Behauptung schon gezeigt. Nun nehmen wir an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt ist, und zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi((n + 1)m) = \varphi(nm + m) = \varphi(nm) + \varphi(m) = \varphi(n)\varphi(m) + \varphi(m) \\ &= (\varphi(n) + 1)\varphi(m) = (\varphi(n) + \varphi(1))\varphi(m) = \varphi(n + 1)\varphi(m). \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass φ ein Ringhomomorphismus ist.
Sei nun $\psi\colon \mathbb{Z} \to K$ ein beliebiger Ringhomomorphismus. Insbesondere ist also $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ und $\pi(-1) = -\psi(1) = -1$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$. Dann ist, da ψ ein Ringhomomorphismus ist, $\psi(n) = \psi(n \cdot 1) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{mal}} = \varphi(n)$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$. Dann ist $\psi(n) = \psi((-n)(-1)) = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{(-n)-\text{mal}} = \varphi(n)$. Somit ist $\psi = \varphi$.

(b) (i) Behauptung: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist injektiv aber nicht surjektiv.
Beweis: In $\mathbb{Q}$ gilt $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber es ist z.B. $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

(ii) Behauptung: $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ ist für jede Primzahl p surjektiv aber nicht injektiv.
Beweis: $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ muss wegen der gezeigten Eindeutigkeit der Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p)$ sein. Dieser ist surjektiv, aber nicht injektiv, da z.B. $0 \neq p$ auf 0 abgebildet wird.

(iii) Behauptung: Dieser Ringhomomorphismus kann nicht injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus, sein.
Beweis: Ansonsten wäre $\mathbb{Z}$ als Ring isomorph zu einem Körper, und somit selbst ein Körper, was aber nicht der Fall ist.

(iv) $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_4$ ist weder injektiv noch surjektiv.
Beweis: $\mathbb{F}_4$ hat als additive abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}/\langle 2\rangle) \times (\mathbb{Z}/\langle 2\rangle)$ (vgl. Aufgabe 6.2). Es ist also stets $1 + 1 = 0$, somit wird jede gerade Zahl auf 0 abgebildet. Also ist diese Abbildung nicht injektiv. Damit sieht man aber auch, dass das Bild der Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_4$ nur zwei Elemente enthalten kann: 0 und 1. Aber $\mathbb{F}_4$ hat vier Elemente, also ist die Abbildung auch nicht surjektiv.

Lösung 7.2:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & -9 & -1 & 8 \\ 3 & 22 & 17 & 13 & -1 \\ -1 & -14 & -7 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 + 2z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 3z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + z_1 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & -10 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + 2z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - z_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_4 \leftarrow z_4 - z_3$$

Wir erhalten die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um zur reduzierten Zeilenstufenform zu gelangen rechnen wir weiter

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_2 \leftarrow \tfrac{1}{5} z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - 2z_3 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 - \frac{3}{5}z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - 4z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{21}{5} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 + z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - z_1 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 + 4z_1 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 + 2z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 - z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 2z_2 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 - 2z_2 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 - z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 + 2z_3 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 + 3z_3 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 + 3z_3 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 + 2z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} z_5 & \leftarrow & z_5 + 2z_4 \\ z_6 & \leftarrow & z_6 + 2z_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} z_6 & \leftarrow & z_6 + 3z_5 \\ z_7 & \leftarrow & z_7 + 3z_5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} z_7 & \leftarrow & z_7 + z_6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind wir bei der Zeilenstufenform angelangt. Nun rechnet man weiter um zur reduzierten Zeilenstufenform zu gelangen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} z_1 & \leftarrow & 3z_1 \\ z_2 & \leftarrow & 3z_2 \\ z_3 & \leftarrow & 4z_3 \\ z_4 & \leftarrow & 4z_4 \\ z_5 & \leftarrow & 3z_5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 2z_6 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 + 2z_6 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 2z_6 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + z_6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 + 4z_5 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 4z_5 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + 3z_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + z_4 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 2z_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 3z_3 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 + 4z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 3z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1+\mathring{\imath} & 2 & \mathring{\imath} \\ 2\mathring{\imath} & 1+2\mathring{\imath} & 1 \\ 2 & 1+\mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & (\mathring{\imath}-1)z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} \\ 2\mathring{\imath} & 1+2\mathring{\imath} & 1 \\ 2 & 1+\mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2+\mathring{\imath}z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3+z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 2 & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 2 & 2+2\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3-z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 2 & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & 2z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & 1+\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1-(1-\mathring{\imath})z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathring{\imath} & 2+2\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & 1+\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1-(1-\mathring{\imath})z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & 1+\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 3\mathring{\imath} & 5-2\mathring{\imath} & 4 \\ 1-3\mathring{\imath} & 0 & 2+3\mathring{\imath} \\ 4 & -1-4\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & 2\mathring{\imath}z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4+3\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \\ 1-3\mathring{\imath} & 0 & 2+3\mathring{\imath} \\ 4 & -1-4\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2-(1-3\mathring{\imath})z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3-4z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4+3\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \\ 0 & 1+2\mathring{\imath} & 6+5\mathring{\imath} \\ 0 & 4+5\mathring{\imath} & 4\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & (3+\mathring{\imath})z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4+3\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4+5\mathring{\imath} & 4\mathring{\imath} \end{pmatrix} \quad z_3 \leftarrow z_3 - (4+5\mathring{\imath})z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4+3\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4+2\mathring{\imath} \end{pmatrix}$$

Wegen $4+2\mathring{\imath} \neq 0$ ist dies die Zeilenstufenform. Die reduzierte Zeilenstufenform ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 7.3:

Wir berechnen zuerst die reduzierte Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b & b \end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow bz_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 1 & b & 1 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b & b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_2 \leftarrow z_2 + z_1 \\ z_3 \leftarrow z_3 + bz_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b & b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_3 \leftarrow z_3 + az_2 \\ z_4 \leftarrow z_4 + bz_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix} \quad z_4 \leftarrow z_4 + z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_2 \leftarrow bz_2 \\ z_3 \leftarrow bz_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_1 \leftarrow z_1 + bz_3 \\ z_2 \leftarrow z_2 + z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 + z_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Lösung

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung 7.4:

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 15 & 3 & 9 & 12 & 2 \\ 5 & -6 & 3 & 3 & -8 \\ 20 & -9 & 6 & 21 & -20 \\ 0 & 6 & 27 & -3 & 56 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_2 \leftarrow z_2 - 3z_1 \\ z_3 \leftarrow z_3 - z_1 \\ z_4 \leftarrow z_4 - 4z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -9 & -2 & 5 & -12 \\ 0 & 6 & 27 & -3 & 56 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 + 2z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + 3z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 2z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 21 & -3 & 40 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 - z_3 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 3z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Da alle Diagonaleinträge in dieser Stufenform verschieden von 0 sind, kann ich die reduzierte Zeilenstufenform sofort ablesen. Sie ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Lösung ist gerade $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

(b) Wir schreiben die Matrix sofort um, indem wir "angenehme" Restklassenvertreter wählen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 + z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + z_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad z_4 \leftarrow z_4 + z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 + z_3 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 + z_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die reduzierte Zeilenstufenform zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Systems ist daher

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(c) Wie oben, schreiben wir sofort passende Restklassenvertreter

$$\begin{pmatrix}2&0&2&1&1\\0&0&0&0&2\\2&0&0&0&1\\2&0&0&0&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} z_3 & \leftarrow & z_3 - z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix}2&0&2&1&1\\0&0&0&0&2\\0&0&1&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} z_2 & \leftarrow & z_2 - z_5 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&2&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} z_1 & \leftarrow & 2z_1 \\ z_5 & \leftarrow & 2z_5 \end{array} \quad \begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} z_2 & \leftrightarrow & z_3 \\ z_5 & \leftrightarrow & z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2&2\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 + z_3 \quad \begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 - z_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Die Lösung ist hiernach

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(d) Analog zu oben rechnet man

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Zeilen} \\ \text{umordnen} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 + 4z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 2z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 + 4z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 + 3z_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad z_5 \leftarrow z_5 + z_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad z_5 \leftarrow z_5 + z_4 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten folgende reduzierte Zeilenstufenform und Lösung.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad z_2 \leftrightarrow z_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 + 2z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + 2z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad z_4 \leftrightarrow z_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 + z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 + z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_4 & \leftarrow & z_4 + 5z_3 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 + 2z_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_5 & \leftarrow & z_5 + 3z_4 \\ z_4 & \leftarrow & 2z_4 \\ z_3 & \leftarrow & 6z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{die letzten} \\ \text{beiden Spalten} \\ \text{auf 0 bringen} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 + 4z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$